Extensiones de politopos áltamente simétricos

Antonio Montero

Universidad Nacional Autónoma de México

Coloquio del Instituto de Matemáticas - C.U.
Abril 2022

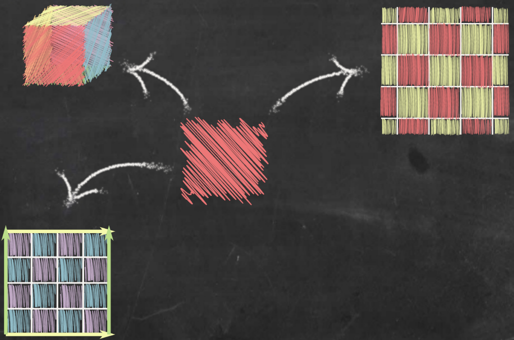
La idea...

La idea...

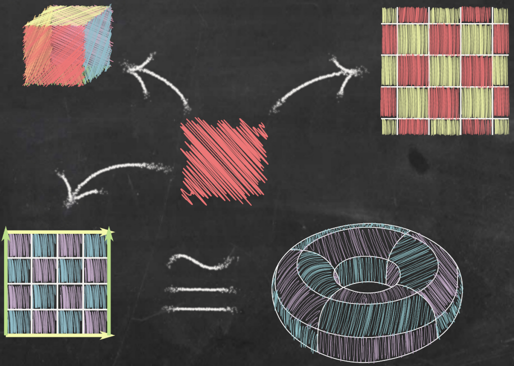
La idea...

La idea...

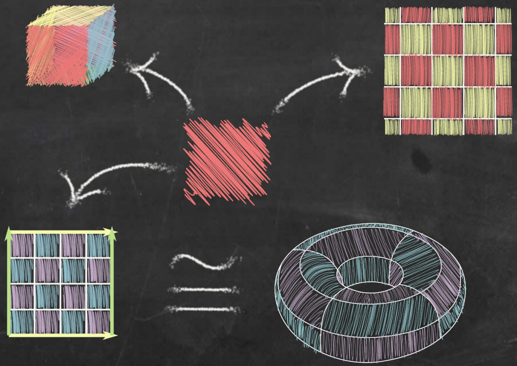
La idea...



La idea...

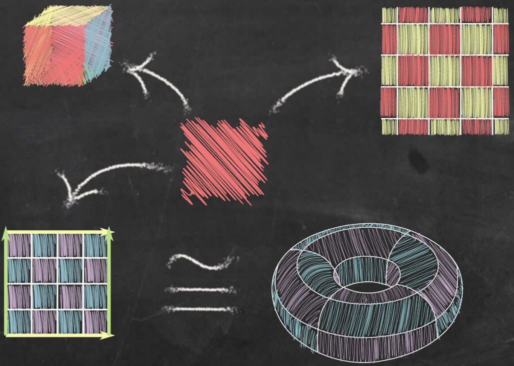


La idea...



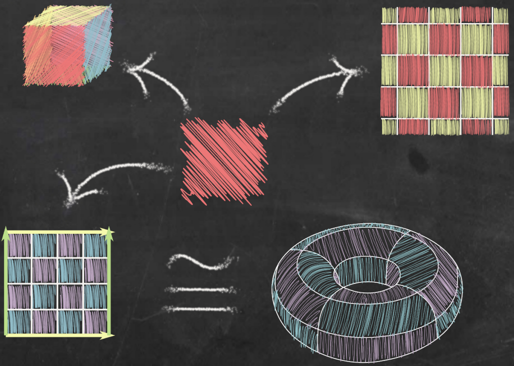
Dado un n-politopo $\mathcal{K}$...

La idea...



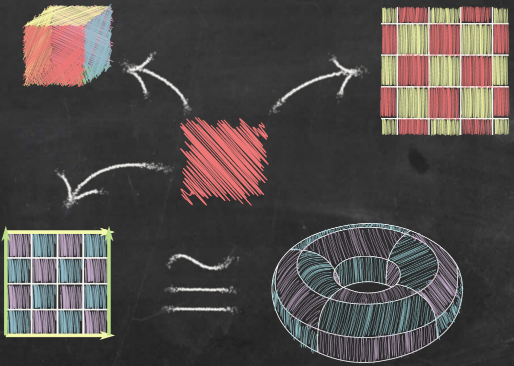
Dado un n-politopo $\mathcal{K}$... ¿Qué posibilidades hay para un $(n+1)$-politopo $\mathcal{P}$ cuyas facetas son todas isomorfas a $\mathcal{K}$.

La idea...



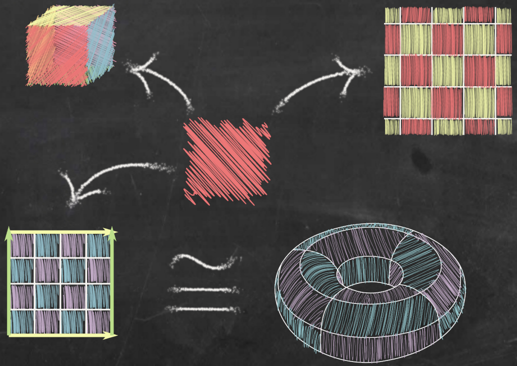
¿Existencia?

La idea...



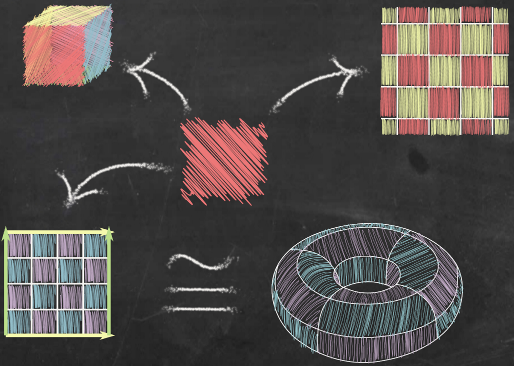
¿Finitud?

La idea...



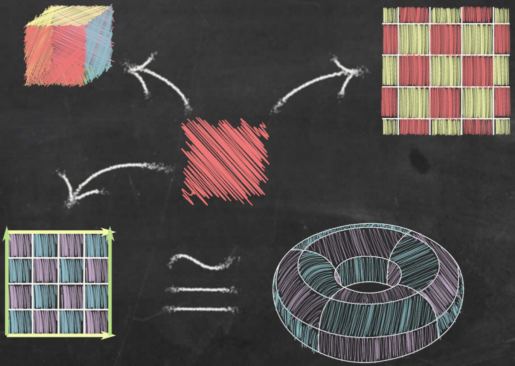
¿Tipo?

La idea...



¿Universalidad?

La idea...



¿Simetria?

Politopos abstractos

La no definición de politopos abstractos...

Politopos abstractos

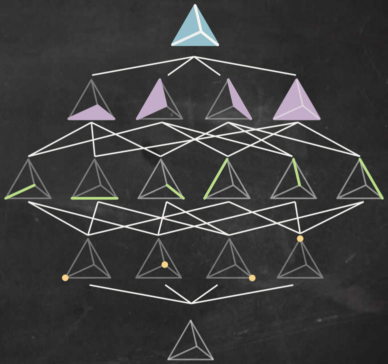
La no definición de politopos abstractos...

- Un *n-politopo (abstracto)* $\mathcal{P}$ Es un c.o.p.o. que comparte algunas propiedades con la retícula de caras de un politopo convexo.

Politopos abstractos

La no definición de politopos abstractos...

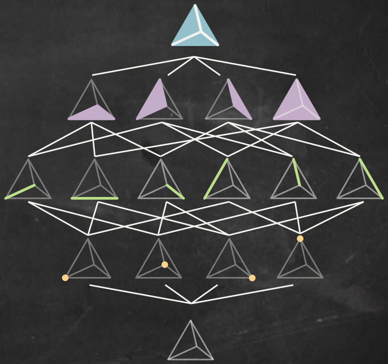
* Un *n*-politopo (abstracto) $\mathcal{P}$ Es un co.p.o. que comparte algunas propiedades con la retícula de caras de un politopo convexo.



Politopos abstractos

La no definición de politopos abstractos...

- Un *n*-politopo (abstracto) $\mathcal{P}$ Es un c.o.p.o. que comparte algunas propiedades con la retícula de caras de un politopo convexo.
- Facetas.



Politopos abstractos

La no definición de politopos abstractos...

- Un *n*-politopo (abstracto) $\mathcal{P}$ Es un c.o.p.o. que comparte algunas propiedades con la retícula de caras de un politopo convexo.
- Facetas.

Politopos abstractos

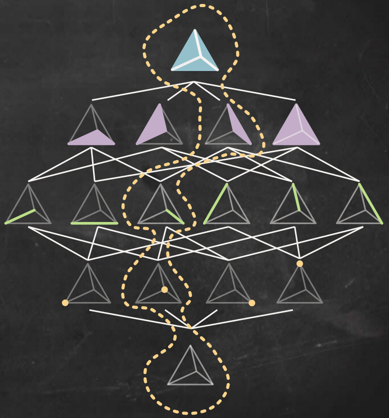
La no definición de politopos abstractos...

- Un *n-politopo (abstracto)* $\mathcal{P}$ Es un c.o.p.o. que comparte algunas propiedades con la retícula de caras de un politopo convexo.
- Facetas.
- Banderas.

Politopos abstractos

La no definición de politopos abstractos...

* Un *n*-politopo (abstracto) $\mathcal{P}$ Es un co.p.o. que comparte algunas propiedades con la retícula de caras de un politopo convexo.
* Facetas.
* Banderas.



Politopos abstractos

Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...

Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...

Politopos abstractos

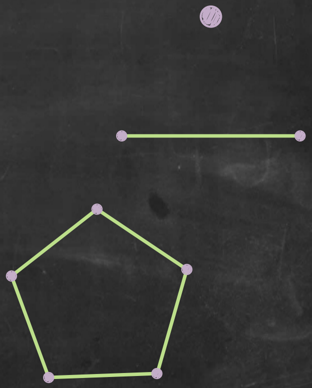
* 0- y 1- politopos son poco interesantes...

Politopos abstractos

- 0- y 1- politopos son poco interesantes...
- 2-politopos: polígonos combinatorios.

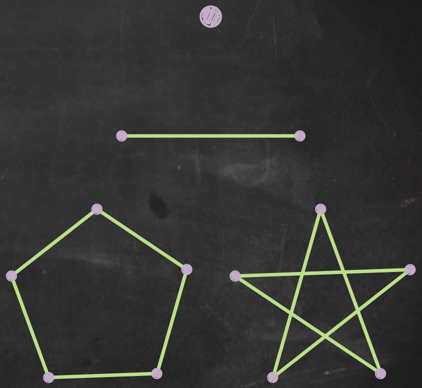
Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.



Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.



Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas

Politopos abstractos

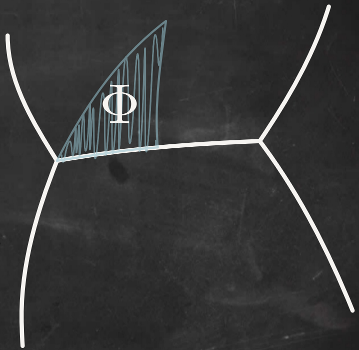
- 0- y 1- politopos son poco interesantes...
- 2-politopos: polígonos combinatorios.
- 3-politopos: mapas

Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos

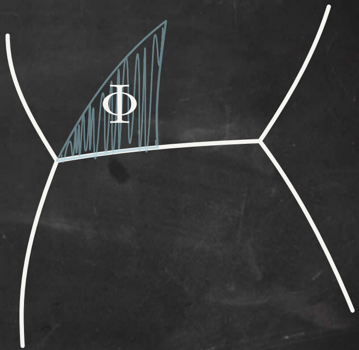
Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos



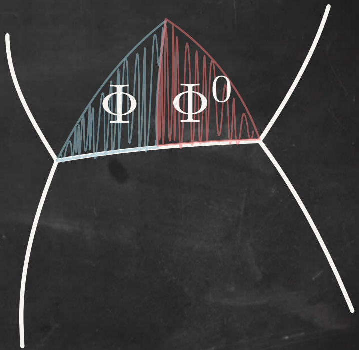
Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos
* Φ^i difiere de Φ exactamente en la i-cara.



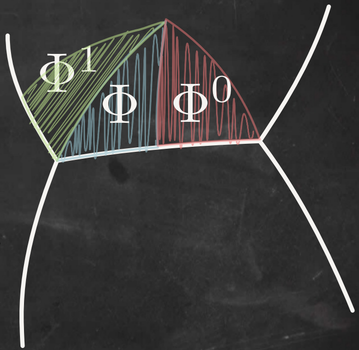
Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos
* Φ^i difiere de Φ exactamente en la i-cara.



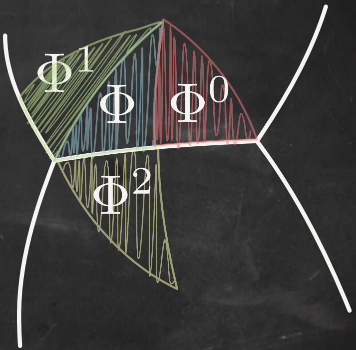
Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos
* Φ^i difiere de Φ exactamente en la i-cara.



Politopos abstractos

- 0- y 1- politopos son poco interesantes...
- 2-politopos: polígonos combinatorios.
- 3-politopos: mapas
- Las banderas: triangulitos
- Φ^i difiere de Φ exactamente en la i-cara.

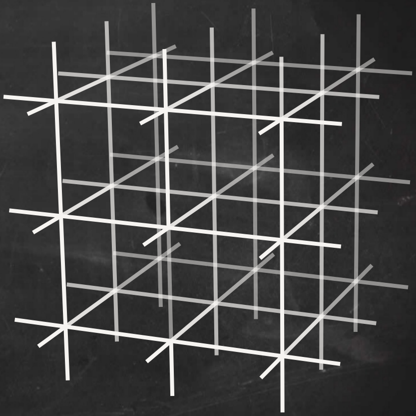


Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos
* Φ^i difiere de Φ exactamente en la i-cara.
* 4- politopos...

Politopos abstractos

* 0- y 1- politopos son poco interesantes...
* 2-politopos: polígonos combinatorios.
* 3-politopos: mapas
* Las banderas: triangulitos
* Φ^i difiere de Φ exactamente en la i-cara.
* 4- politopos...



Politopos abstractos
Tipo

* En un mapa las caras son polígonos.

Politopos abstractos

Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$

Politopos abstractos
Tipo

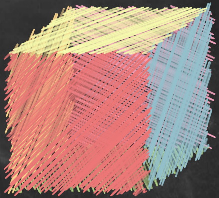
* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,

Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.

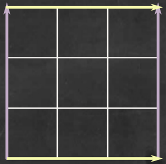
Politopos abstractos
Tipo

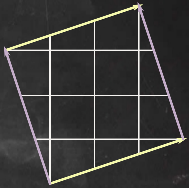
- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.

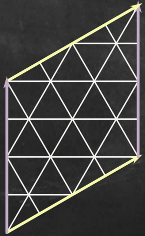


Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.

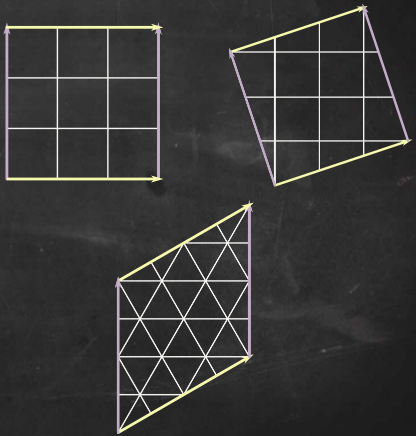






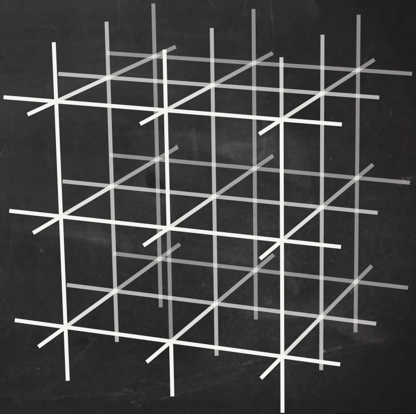
Politopos abstractos
Tipo

* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
* Facetas: $(n-1)$-politopos.



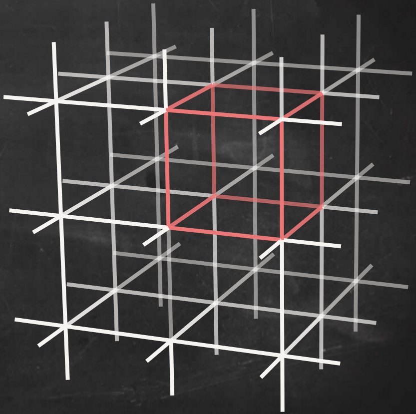
Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
- Facetas: $(n-1)$-politopos.



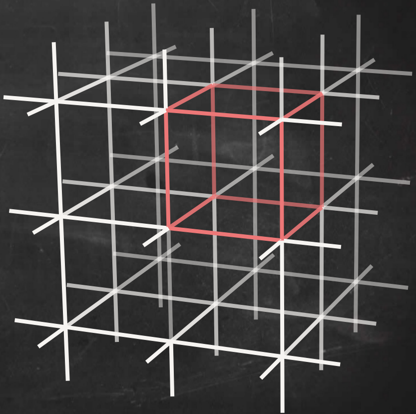
Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
- Facetas: $(n-1)$-politopos.



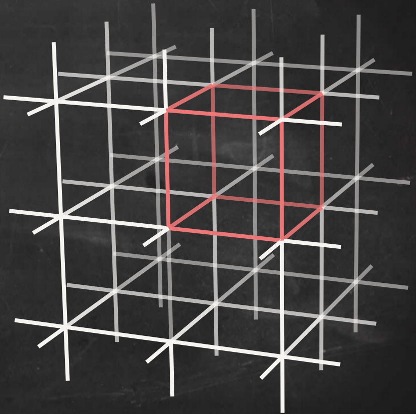
Politopos abstractos
Tipo

* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
* Facetas: $(n-1)$-politopos.
* Tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$:



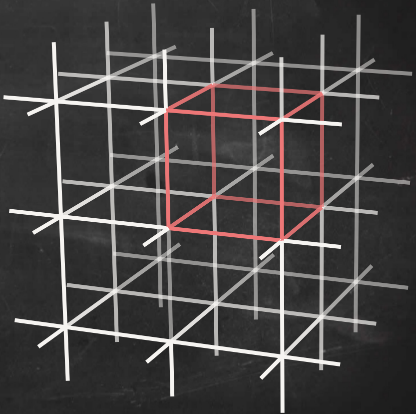
Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
- Facetas: $(n-1)$-politopos.
- Tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$:
  - Facetas de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$,



Politopos abstractos
Tipo

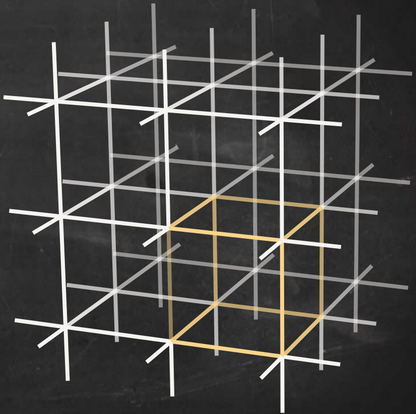
* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
* Facetas: $(n-1)$-politopos.
* Tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$:
  - Facetas de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$,
  - p_{n-1} alrededor de cada $(n-3)$-cara.



Politopos abstractos

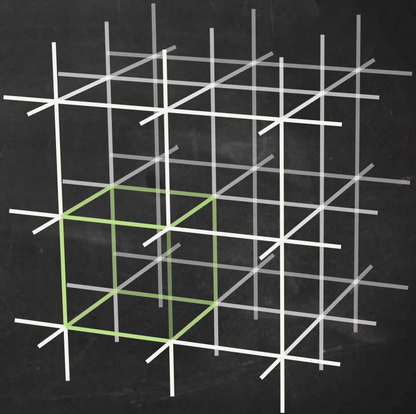
Tipo

* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
* Facetas: $(n-1)$-politopos.
* Tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$:
  - Facetas de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$,
  - p_{n-1} alrededor de cada $(n-3)$-cara.



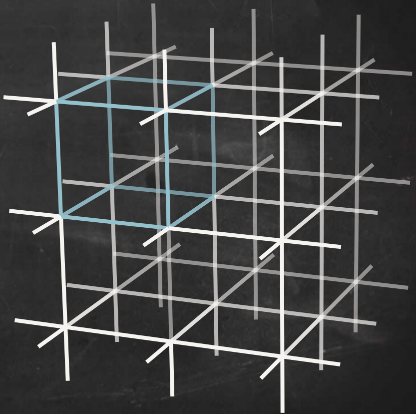
Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
- Facetas: $(n-1)$-politopos.
- Tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$:
  - Facetas de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$,
  - p_{n-1} alrededor de cada $(n-3)$-cara.



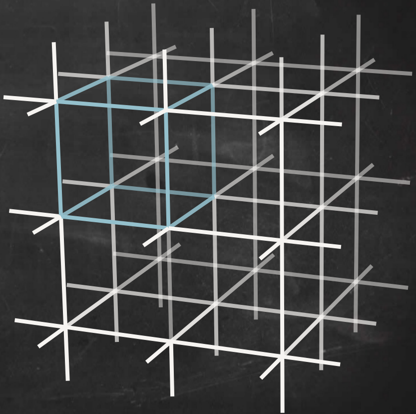
Politopos abstractos
Tipo

- En un mapa las caras son polígonos.
- Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
- Facetas: $(n-1)$-politopos.
- Tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$:
  - Facetas de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$,
  - p_{n-1} alrededor de cada $(n-3)$-cara.



Politopos abstractos
Tipo

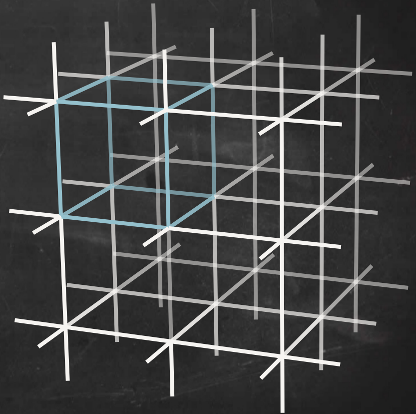
* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
* Facetas: $(n-1)$-politopos.
* Tipo $\{\mathcal{K}, p_{n-1}\}$:
  - Facetas de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$,
  - p_{n-1} alrededor de cada $(n-3)$-cara.



Politopos abstractos

Tipo

* En un mapa las caras son polígonos.
* Tipo $\{p, q\}$
  - Caras p-ágonos,
  - q alrededor de cada vértice.
* Facetas: $(n-1)$-politopos.
* Tipo $\{\mathcal{K}, p_{n-1}\}$:
  - Facetas isomorfas a $\mathcal{K}$,
  - p_{n-1} alrededor de cada $(n-3)$-cara.



Un rapidín

- P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$

Un rapidín

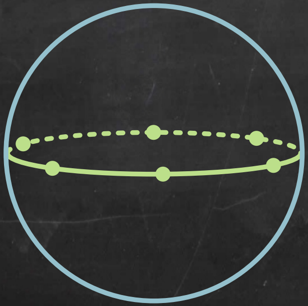
* P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$
  - Sugerencia: Rangos pequeños.

Un rapidín

* P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$
  - Sugerencia: Rangos pequeños.
  - Respuesta: La extensión de tipo $\{\mathcal{K}, 2\}$

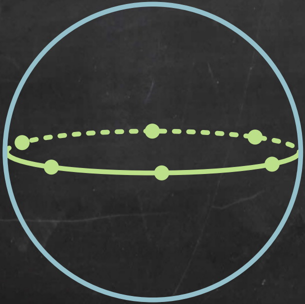
Un rapidín

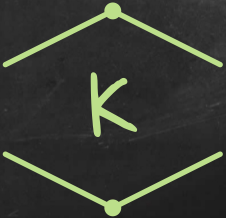
- P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$
  - Sugerencia: Rangos pequeños.
  - Respuesta: La extensión de tipo $\{\mathcal{K}, 2\}$



Un rapidín

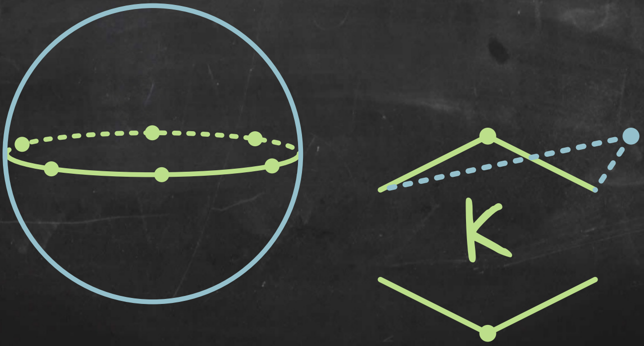
* P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$
  - Sugerencia: Rangos pequeños.
  - Respuesta: La extensión de tipo $\{\mathcal{K}, 2\}$





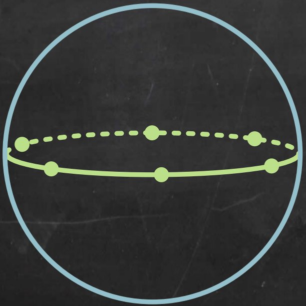
Un rapidín

- P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$
  - Sugerencia: Rangos pequeños.
  - Respuesta: La extensión de tipo $\{\mathcal{K}, 2\}$



Un rapidín

* P: Dado $\mathcal{K}$, existe un politopo $\mathcal{P}$ tal que todas sus facetas son isomorfas a $\mathcal{K}$
  - Sugerencia: Rangos pequeños.
  - Respuesta: La extensión de tipo $\{\mathcal{K}, 2\}$



Simetrías

- Un automorfismo de un n-politopo $\mathcal{P}$ es una biyección $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ que preserva el orden.

Simetrías

* Un automorfismo de un n-politopo $\mathcal{P}$ es una biyección $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ que preserva el orden.

* Denotamos $\Gamma(\mathcal{P})$ al grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$.

Simetrías

- Un automorfismo de un n-politopo $\mathcal{P}$ es una biyección $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ que preserva el orden.
- Denotamos $\Gamma(\mathcal{P})$ al grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$.
- $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente banderas.

Simetrías

* Un automorfismo de un n-politopo $\mathcal{P}$ es una biyección $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ que preserva el orden.
* Denotamos $\Gamma(\mathcal{P})$ al grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$.
* $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente banderas.
* Si esta acción es también transitiva, entonces decimos que $\mathcal{P}$ es regular.

Un problema nuevo

* Las facetas de un politopo regular son regulares.

Un problema nuevo

* Las facetas de un politopo regular son regulares.

* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular, ¿existe un $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$?

Un problema nuevo

* Las facetas de un politopo regular son regulares.

* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular, ¿existe un $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$?
  - La extensión trivial de $\mathcal{K}$ es regular si $\mathcal{K}$ es regular

Un problema nuevo

- Las facetas de un politopo regular son regulares.

- Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular, ¿existe un $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$?
  - La extensión trivial de $\mathcal{K}$ es regular si $\mathcal{K}$ es regular
  - La extensión trivial es un poquito fea...

Un problema nuevo

* Las facetas de un politopo regular son regulares.

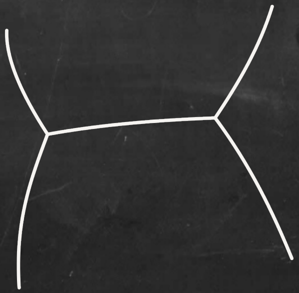
* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular, ¿existe un $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$?
  - La extensión trivial de $\mathcal{K}$ es regular si $\mathcal{K}$ es regular
  - La extensión trivial es un poquito fea...

* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo, ¿$\mathcal{K}$ admite una extensión no degenerada?

Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

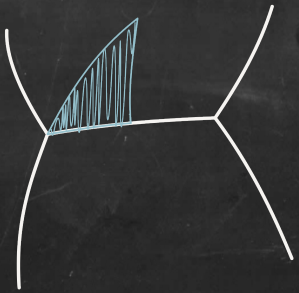
$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

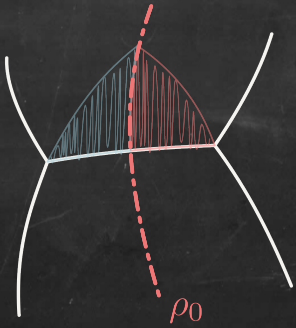
Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$

Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

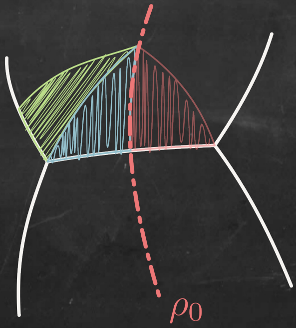
$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

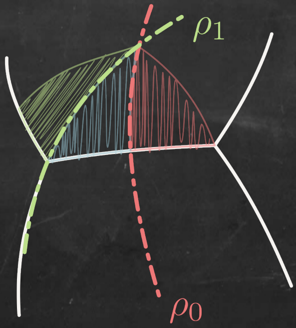
$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

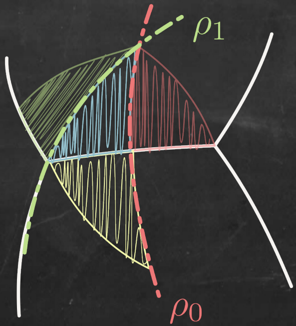
$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

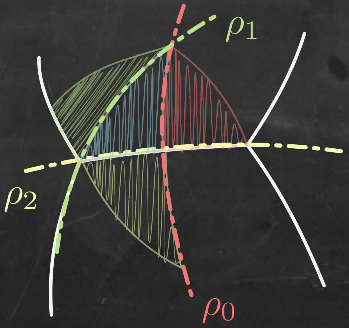
$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular y Φ es una bandera, existen automorfismos $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ tal que

$$\Phi\rho_i = \Phi^i.$$



Simetrías de PR

Para un n-politopo regular $\mathcal{P}$

* $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$

Simetrías de PR

Para un n-politopo regular $\mathcal{P}$

* $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$

* Si $\mathcal{P}$ es de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$,

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 \\ (\rho_i \rho_j)^2 &= 1 \quad \text{si} \quad |i-j| \geqslant 2, \\ (\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} &= 1 \end{aligned}$$

Simetrías de PR

Para un n-politopo regular $\mathcal{P}$

* $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$
* Si $\mathcal{P}$ es de tipo $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$,

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 \\ (\rho_i \rho_j)^2 &= 1 \quad \text{si} \quad |i-j| \geqslant 2, \\ (\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} &= 1 \end{aligned}$$

* $\Gamma(\mathcal{P})$ satisface la propiedad de la intersección

$$\langle \rho_i : i \in I \rangle \cap \langle \rho_j : j \in J \rangle = \langle \rho_k : k \in I \cap J \rangle .$$

Simetrías de PR

Teorema (Schulte, 1982)

Dados $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \{2, \ldots, \infty\}$ un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple

Simetrías de PR

Teorema (Schulte, 1982)

Dados $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \{2, \ldots, \infty\}$ un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 \\ * \quad (\rho_i \rho_j)^2 &= 1 \quad \text{si} \quad |i-j| \geqslant 2, \\ (\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} &= 1 \end{aligned}$$

Simetrías de PR

Teorema (Schulte, 1982)

Dados $p_1, \dots, p_{n-1} \in \{2, \dots, \infty\}$ un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple

* $$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 \\ (\rho_i \rho_j)^2 &= 1 \quad \text{si} \quad |i - j| \geqslant 2, \\ (\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} &= 1 \end{aligned}$$
* Y la propiedad de la intersección.

Simetrías de PR

Teorema (Schulte, 1982)

Dados $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \{2, \ldots, \infty\}$ un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple

* $$\rho_i^2 = 1$$ $$(\rho_i \rho_j)^2 = 1 \quad \text{si} \quad |i-j| \geqslant 2,$$ $$(\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} = 1$$
* Y la propiedad de la intersección.

Existe un n-politopo regular $\mathcal{P}(\Gamma)$ tal que

* $\mathcal{P}(\Gamma)$ es de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$

Simetrías de PR

Teorema (Schulte, 1982)

Dados $p_1, \dots, p_{n-1} \in \{2, \dots, \infty\}$ un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple

* $$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 \\ (\rho_i \rho_j)^2 &= 1 \quad \text{si} \quad |i-j| \geqslant 2, \\ (\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} &= 1 \end{aligned}$$
* Y la propiedad de la intersección.

Existe un n-politopo regular $\mathcal{P}(\Gamma)$ tal que

* $\mathcal{P}(\Gamma)$ es de tipo $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$
* $\Gamma(\mathcal{P}(\Gamma)) = \Gamma$

Simetrías de PR

Teorema (Schulte, 1982)

Dados $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \{2, \ldots, \infty\}$ un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple

* $$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 \\ (\rho_i \rho_j)^2 &= 1 \quad \text{si} \quad |i-j| \geqslant 2, \\ (\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} &= 1 \end{aligned}$$
* Y la propiedad de la intersección.

Existe un n-politopo regular $\mathcal{P}(\Gamma)$ tal que

* $\mathcal{P}(\Gamma)$ es de tipo $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$
* $\Gamma(\mathcal{P}(\Gamma)) = \Gamma$
* Las facetas de $\mathcal{P}(\Gamma)$ son isomorfas al politopo $\mathcal{P}\left(\langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-2} \rangle\right)$.

Problema de extensión, versión grupera

Dado un n-politopo regular $\mathcal{K}$ con $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ y un grupo $\Gamma = \langle \tilde{\rho}_0, \ldots, \tilde{\rho}_n \rangle$

Problema de extensión, versión grupera

Dado un n-politopo regular $\mathcal{K}$ con $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ y un grupo $\Gamma = \langle \tilde{\rho}_0, \ldots, \tilde{\rho}_n \rangle$

* $\tilde{\rho}_n$ es una involución,

Problema de extensión, versión grupera

Dado un n-politopo regular $\mathcal{K}$ con $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ y un grupo $\Gamma = \langle \tilde{\rho}_0, \ldots, \tilde{\rho}_n \rangle$

* $\tilde{\rho}_n$ es una involución,
* $\rho_i \mapsto \tilde{\rho}_i$, para $i \leqslant n-1$ define un encaje,

Problema de extensión, versión grupera

Dado un n-politopo regular $\mathcal{K}$ con $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ y un grupo $\Gamma = \langle \tilde{\rho}_0, \dots, \tilde{\rho}_n \rangle$

* $\tilde{\rho}_n$ es una involución,
* $\rho_i \mapsto \tilde{\rho}_i$, para $i \leqslant n-1$ define un encaje,
* Γ cumple la propiedad de la intersección,

Problema de extensión, versión grupera

Dado un n-politopo regular $\mathcal{K}$ con $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ y un grupo $\Gamma = \langle \tilde{\rho}_0, \dots, \tilde{\rho}_n \rangle$

* $\tilde{\rho}_n$ es una involución,
* $\rho_i \mapsto \tilde{\rho}_i$, para $i \leqslant n-1$ define un encaje,
* Γ cumple la propiedad de la intersección,

El n-politopo regular $\mathcal{P}(\Gamma)$ es una extensión regular de $\mathcal{K}$ de tipo $\{\mathcal{K}, q\}$ donde $q = |\langle \tilde{\rho}_{n-1} \tilde{\rho}_n \rangle|$.

Extensiones regulares

* (Schulte, 83): Extensión universal. Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$,
  $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{K}) *_{\Gamma(\mathcal{F})} (\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2)$.

Extensiones regulares

* (Schulte, 83): Extensión universal. Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$,
  $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{K}) *_{\Gamma(\mathcal{F})} (\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2)$.

* (Schulte, 82-85): Extensión regular finita, representación por permutaciones de facetas. Tipo $\{\mathcal{K}, 6\}$,
  $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{K}) \times S_{m+1}$

Extensiones regulares

* (Schulte, 83): Extensión universal. Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$, $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{K}) *_{\Gamma(\mathcal{F})} (\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2)$.

* (Schulte, 82-85): Extensión regular finita, representación por permutaciones de facetas. Tipo $\{\mathcal{K}, 6\}$, $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{K}) \times S_{m+1}$

* (Danzer, 84): Cubos generalizados $2^{\mathcal{K}}$. Tipo $\{\mathcal{K}, 4\}$, $\Gamma(2^{\mathcal{K}}) \cong C_2^m \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$

Extensiones regulares

* (Pellicer, 2010): Extensiones de PR dualmente bipartitos. Tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$, $\forall s \geqslant 3$. Construidos usando Schereier coset graphs (grupos de permutaciones)

Extensiones regulares

* (Pellicer, 2010): Extensiones de PR dualmente bipartitos. Tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$, $\forall s \geqslant 3$. Construidos usando Schereier coset graphs (grupos de permutaciones)

* (Pellicer, 2009): Extensiones de politopos regulares con tipo preestablecido ($2s^{\mathcal{K}-1}$), tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$, $\forall s \geqslant 2$, $\Gamma(2s^{\mathcal{K}-1}) \cong (C_2 \times C_s^{m-1}) \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$

Extensiones regulares

* (Pellicer, 2010): Extensiones de PR dualmente bipartitos. Tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$, $\forall s \geqslant 3$. Construidos usando Schereier coset graphs (grupos de permutaciones)

* (Pellicer, 2009): Extensiones de politopos regulares con tipo preestablecido ($2s^{\mathcal{K}-1}$), tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$, $\forall s \geqslant 2$, $\Gamma(2s^{\mathcal{K}-1}) \cong (C_2 \times C_s^{m-1}) \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$

* (Hartley, 2005): El n-hemicubo no se puede extender con un número impar.

Otras clases de simetrías?

Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.

Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.

Otras clases de simetrías?

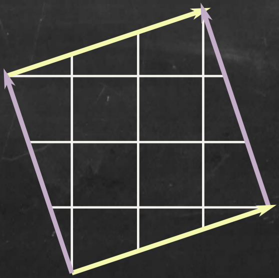
- Los PR son los más simétricos.
- Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banseras.
- Qué pasa en 2-orbitas?

Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.
* Qué pasa en 2-órbitas?
* Mapas quirales:

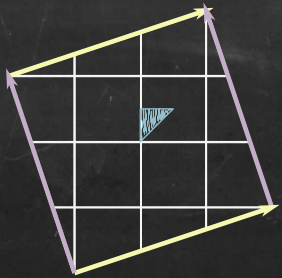
Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.
* Qué pasa en 2-órbitas?
* Mapas quirales:



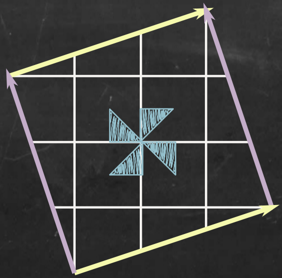
Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banseras.
* Qué pasa en 2-orbitas?
* Mapas quirales:



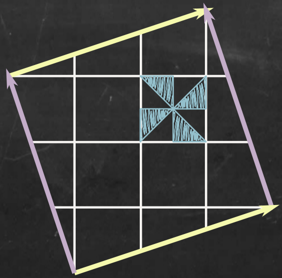
Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.
* Qué pasa en 2-órbitas?
* Mapas quirales:



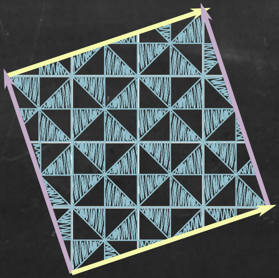
Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.
* Qué pasa en 2-órbitas?
* Mapas quirales:



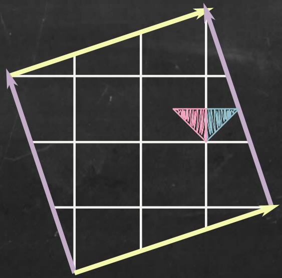
Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.
* Qué pasa en 2-órbitas?
* Mapas quirales:



Otras clases de simetrías?

* Los PR son los más simétricos.
* Grado de simetría $\longleftrightarrow$ número de órbitas en banderas.
* Qué pasa en 2-órbitas?
* Mapas quirales:



Otras clases de simetrías?

* Mapas quirales (no reflexivos) admiten todas las rotaciones pero no admiten reflexiones.

Otras clases de simetrías?

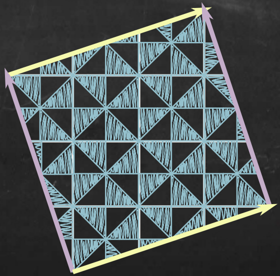
* Mapas quirales (no reflexivos) admiten todas las rotaciones pero no admiten reflexiones.
* 4-Politopos geométricamente quirales fueron estudiados por Coxeter (Twisted Honeycombs, 1970)

Otras clases de simetrías?

* Mapas quirales (no reflexivos) admiten todas las rotaciones pero no admiten reflexiones.
* 4-Politopos geométricamente quirales fueron estudiados por Coxeter (Twisted Honeycombs, 1970)
* La noción geométrica de rotaciones se puede describir en términos combinatorios.

Otras clases de simetrías?

* Mapas quirales (no reflexivos) admiten todas las rotaciones pero no admiten reflexiones.
* 4-Politopos geométricamente quirales fueron estudiados por Coxeter (Twisted Honeycombs, 1970)
* La noción geométrica de rotaciones se puede describir en términos combinatorios.



Politopos quirales

Politopos quirales

(Schulte,Weiss - 91): Un politopo abstracto es quiral si tiene 2 órbitas en banderas y banderas adyacentes pertenecen a diferentes órbitas.

Politopos quirales

(Schulte,Weiss - 91): Un politopo abstracto es quiral si tiene 2 órbitas en banderas y banderas adyacentes pertenecen a diferentes órbitas.

Teorema (Schulte,Weiss - 91)

Dado un grupo $\Gamma = ...$

Politopos quirales

(Schulte,Weiss - 91): Un politopo abstracto es quiral si tiene 2 órbitas en banderas y banderas adyacentes pertenecen a diferentes órbitas.

Teorema (Schulte,Weiss - 91)

Dado un grupo $\Gamma = ...$

* ...relaciones...

Politopos quirales

(Schulte,Weiss - 91): Un politopo abstracto es quiral si tiene 2 órbitas en banderas y banderas adyacentes pertenecen a diferentes órbitas.

Teorema (Schulte,Weiss - 91)

Dado un grupo $\Gamma = ...$

- ...relaciones...
- ... propiedad de la intersección...

Politopos quirales

(Schulte, Weiss - 91): Un politopo abstracto es quiral si tiene 2 órbitas en banderas y banderas adyacentes pertenecen a diferentes órbitas.

Teorema (Schulte, Weiss - 91)

Dado un grupo $\Gamma = \ldots$

- ...relaciones...
- ... propiedad de la intersección...

Entonces Γ es el grupo de automorfismos de un politopo quiral...

Politopos quirales

(Schulte,Weiss - 91): Un politopo abstracto es quiral si tiene 2 órbitas en banderas y banderas adyacentes pertenecen a diferentes órbitas.

Teorema (Schulte,Weiss - 91)

Dado un grupo $\Gamma = \ldots$

* ...relaciones...
* ... propiedad de la intersección...

Entonces Γ es el grupo de automorfismos de un politopo quiral...

... o el grupo de rotaciones de un politopo regular.

Politopos quirales
El chismecito

* Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.

Politopos quirales
El chismecito

* Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.

Politopos quirales

El chismecito

* Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.
  - No hay mapas quirales en superficies de género 2, 3, 4, 5 or 6.

Politopos quirales
El chismecito

* Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.
  - No hay mapas quirales en superficies de género 2, 3, 4, 5 or 6.
  - Existen una infinidad de superficies que admiten mapas quirales.

Politopos quirales

El chismecito

- Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.
  - No hay mapas quirales en superficies de género 2, 3, 4, 5 or 6.
  - Existen una infinidad de superficies que admiten mapas quirales.
- Rango 4:
  - Primeros ejemplos por Coxeter en los 70.

Politopos quirales

El chismecito

* Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.
  - No hay mapas quirales en superficies de género 2, 3, 4, 5 or 6.
  - Existen una infinidad de superficies que admiten mapas quirales.
* Rango 4:
  - Primeros ejemplos por Coxeter en los 70.
  - (Colbourn-Weiss, Nostrand-Schulte, Schulte-Weiss, Monson-Schulte … 90's): Ejemplos construídos a partir de cocientes de teselaciones hiperbólicas.

Politopos quirales

El chismecito

* Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.
  - No hay mapas quirales en superficies de género 2, 3, 4, 5 or 6.
  - Existen una infinidad de superficies que admiten mapas quirales.
* Rango 4:
  - Primeros ejemplos por Coxeter en los 70.
  - (Colbourn-Weiss, Nostrand-Schulte, Schulte-Weiss, Monson-Schulte ... 90's): Ejemplos construídos a partir de cocientes de teselaciones hiperbólicas.
  - No existen 4-politopos quirales que sean cocientes de teselaciones euclidianas.

Politopos quirales

El chismecito

- Mapas quirales (3-politopos quirales): muchos ejemplos.
  - Una infinidad de mapas quirales en el toro.
  - No hay mapas quirales en superficies de género 2, 3, 4, 5 or 6.
  - Existen una infinidad de superficies que admiten mapas quirales.
- Rango 4:
  - Primeros ejemplos por Coxeter en los 70.
  - (Colbourn-Weiss, Nostrand-Schulte, Schulte-Weiss, Monson-Schulte ... 90's): Ejemplos construídos a partir de cocientes de teselaciones hiperbólicas.
  - No existen 4-politopos quirales que sean cocientes de teselaciones euclidianas.
  - (McMullen-Schulte, 96): No existen n-politopos quirales que surjan como cocientes de teselaciones euclidianas ($n \geqslant 4$).

Politopos quirales
Más chisme

* Rango 5:

Politopos quirales
Más chisme

* Rango 5:
  - (Schulte,Weiss - 95): Primer ejemplo de un 5-politopo quiral (muy infinito)

Politopos quirales

Más chisme

* Rango 5:
  - (Schulte,Weiss - 95): Primer ejemplo de un 5-politopo quiral (muy infinito)
  - (Conder,Hubard,Pisanski - 2008): Primer ejemplo finito de un 5-politopo quiral.

Politopos quirales
Más chisme

* Rango 5:
  - (Schulte,Weiss - 95): Primer ejemplo de un 5-politopo quiral (muy infinito)
  - (Conder,Hubard,Pisanski - 2008): Primer ejemplo finito de un 5-politopo quiral.

* (Pellicer - 2010): Los politopos quirales existen en cualquier rango.

Politopos quirales

Más chisme

- Rango 5:
  - (Schulte,Weiss - 95): Primer ejemplo de un 5-politopo quiral (muy infinito)
  - (Conder,Hubard,Pisanski - 2008): Primer ejemplo finito de un 5-politopo quiral.
- (Pellicer - 2010): Los politopos quirales existen en cualquier rango.
- (Cunningham, 2017): Los n-politopos quirales no pueden ser pequeños si n suficientemente grande.

El problema de extensión

Dado $\mathcal{K}$ un politopo ______ , ¿es posible construir una extensión ______ $\mathcal{P}$ de $\mathcal{K}$?

El problema de extensión

Dado $\mathcal{K}$ un politopo _____ , ¿es posible construir una extensión _____ $\mathcal{P}$ de $\mathcal{K}$?

Proposición

Sea $\mathcal{P}$ un n-politopo quiral:

* Todas las facetas de $\mathcal{P}$ son isomorfas.

El problema de extensión

Dado $\mathcal{K}$ un politopo ______ , ¿es posible construir una extensión ______ $\mathcal{P}$ de $\mathcal{K}$?

Proposición

Sea $\mathcal{P}$ un n-politopo quiral:

* Todas las facetas de $\mathcal{P}$ son isomorfas.
* Todas las facetas de $\mathcal{P}$ son o bien regulares y orientables o bien quirales, sin embargo todas las $(n-2)$-caras son regulares.

Extensiones quirales de politopos quirales

* (Schulte,Weiss - 95): Todo politopo quiral $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral

Extensiones quirales de politopos quirales

* (Schulte,Weiss - 95): Todo politopo quiral $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral
  - Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$

Extensiones quirales de politopos quirales

* (Schulte,Weiss - 95): Todo politopo quiral $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral
  - Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$
  - Producto libre amalgamado.

Extensiones quirales de politopos quirales

* (Schulte,Weiss - 95): Todo politopo quiral $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral
  - Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$
  - Producto libre amalgamado.
* (Cunningham,Pellicer - 2013): Todo politopo quiral finito $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral finito.

Extensiones quirales de politopos quirales

* (Schulte,Weiss - 95): Todo politopo quiral $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral
  - Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$
  - Producto libre amalgamado.

* (Cunningham,Pellicer - 2013): Todo politopo quiral finito $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral finito.
  - Tipo $\{\mathcal{K}, q\}$ para algún número par q

Extensiones quirales de politopos quirales

* (Schulte,Weiss - 95): Todo politopo quiral $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral
  - Tipo $\{\mathcal{K}, \infty\}$
  - Producto libre amalgamado.

* (Cunningham,Pellicer - 2013): Todo politopo quiral finito $\mathcal{K}$ con facetas regulares admite una extensión quiral finito.
  - Tipo $\{\mathcal{K}, q\}$ para algún número par q
  - Grupos de permutación (coset graphs).

Extensiones quirales de politopos quirales

Teorema (M., 2021)

* Si $\mathcal{K}$ es un politopo quiral (c.f.r) finito, dualmente bipartito, entonces existen una infinitad de números s tal que $\mathcal{K}$ tiene una extensión quiral finita de tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$.

Extensiones quirales de politopos quirales

Teorema (M., 2021)

* Si $\mathcal{K}$ es un politopo quiral (c.f.r) finito, dualmente bipartito, entonces existen una infinitad de números s tal que $\mathcal{K}$ tiene una extensión quiral finita de tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$.
* Si $\mathcal{K}$ es un politopo quiral c.f.r. finito que tiene un cociente regular no muy degenerado, entonces existen una infinidad de números s tal que $\mathcal{K}$ tiene una extensión finita de tipo $\{\mathcal{K}, 2s\}$.

Extensiones quirales de politopos quirales

Dado un politopo regular y orientable $\mathcal{K}$, ¿existe una extensión quiral de $\mathcal{K}$?

Extensiones quirales de politopos quirales

Dado un politopo regular y orientable $\mathcal{K}$, ¿existe una extensión quiral de $\mathcal{K}$?

* (Cunningham, 2017): Si $\mathcal{K}$ es $(1, n-1)$-flat, entonces $\mathcal{K}$ no admite una extensión quiral.

Extensiones quirales de politopos quirales

Dado un politopo regular y orientable $\mathcal{K}$, ¿existe una extensión quiral de $\mathcal{K}$?

- (Cunningham, 2017): Si $\mathcal{K}$ es $(1, n-1)$-flat, entonces $\mathcal{K}$ no admite una extensión quiral.
- (Conder, Hubard, Pellicer, O'Reilly - 2018 *): El n-simplejo admite una infinidad de extensiones quirales con grupo de automorfismos simétrico o alternante

Extensiones quirales de politopos quirales

Dado un politopo regular y orientable $\mathcal{K}$, ¿existe una extensión quiral de $\mathcal{K}$?

* (Cunningham, 2017): Si $\mathcal{K}$ es $(1, n-1)$-flat, entonces $\mathcal{K}$ no admite una extensión quiral.
* (Conder, Hubard, Pellicer, O'Reilly - 2018 *): El n-simplejo admite una infinidad de extensiones quirales con grupo de automorfismos simétrico o alternante
* (M., Pellicer, Toledo, 2022 +): Si n es par, casi toda teselación cúbica del n-toro admite una extensión quiral.

Extensiones quirales

Problemas abiertos

* ¿Para todo politopo quiral (c.f.r) $\mathcal{K}$ y toda $q \geqslant 2$, existe una extensión quiral $\mathcal{K}$ de tipo $\{\mathcal{K}, q\}$?

Extensiones quirales

Problemas abiertos

* ¿Para todo politopo quiral (c.f.r) $\mathcal{K}$ y toda $q \geqslant 2$, existe una extensión quiral $\mathcal{K}$ de tipo $\{\mathcal{K}, q\}$?

* ¿Todo (algún) politopo orientable admite una extensión quiral universal?

Extensiones quirales

Problemas abiertos

* ¿Para todo politopo quiral (c.f.r) $\mathcal{K}$ y toda $q \geqslant 2$, existe una extensión quiral $\mathcal{K}$ de tipo $\{\mathcal{K}, q\}$?

* ¿Todo (algún) politopo orientable admite una extensión quiral universal?

* ¿Todo politopo regular orientable no-degenerado admite una extensión quiral (con un tipo dado)?

Politopos de 2 órbitas

Politopos de 2 órbitas

* Para cada subconjunto propio propio de $I \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ existe una clase de politopos de 2 orbitas: la clase 2_I.

Politopos de 2 órbitas

* Para cada subconjunto propio propio de $I \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ existe una clase de politopos de 2 orbitas: la clase 2_I.

* Quirales $= 2_{\emptyset}$.

Politopos de 2 órbitas

- Para cada subconjunto propio propio de $I \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ existe una clase de politopos de 2 orbitas: la clase 2_I.
- Quirales $= 2_\emptyset$.
- (Hubard,Schulte): Un teorema que caracteriza los grupos de automorfismos de los politopos en clase 2_I.

Politopos de 2 órbitas

- Para cada subconjunto propio propio de $I \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ existe una clase de politopos de 2 orbitas: la clase 2_I.
- Quirales $= 2_{\emptyset}$.
- (Hubard,Schulte): Un teorema que caracteriza los grupos de automorfismos de los politopos en clase 2_I.
- (Pellicer,Potocnik,Toledo - 2019): Existen maniplexes de dos órbitas en clase 2_I para toda $n \geqslant 4$ y toda I.

Politopos de 2 órbitas

- Para cada subconjunto propio propio de $I \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ existe una clase de politopos de 2 orbitas: la clase 2_I.
- Quirales = $2_\emptyset$.
- (Hubard,Schulte): Un teorema que caracteriza los grupos de automorfismos de los politopos en clase 2_I.
- (Pellicer,Potocnik,Toledo - 2019): Existen maniplexes de dos órbitas en clase 2_I para toda $n \geqslant 4$ y toda I.
- (Mochán, 2022$^+$): Algunos de esos maniplexes son politopos.

Extensiones de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase 2_I son transitivos en facetas si y solo si $I \neq \{0, \ldots, n-2\}$.

Extensiones de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase 2_I son transitivos en facetas si y solo si $I \neq \{0, \dots, n-2\}$.

* Las facetas de los politopos de clase 2_I son regulares o de clase $2_{I \setminus \{n-1\}}$.

Extensiones de 2 orbitas

- Los n-politopos de clase 2_I son transitivos en facetas si y solo si $I \neq \{0, \ldots, n-2\}$.
- Las facetas de los politopos de clase 2_I son regulares o de clase $2_{I \setminus \{n-1\}}$.
- El problema de extensión tiene sentido y (otra vez) tiene dos posibilidades.

Alternantes de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase $2_{\{0,\ldots,n-2\}}$ no son transitivos en facetas.

Alternantes de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase $2_{\{0,\ldots,n-2\}}$ no son transitivos en facetas.
* Sus facetas son regulares y tienen dos tipos de ellas, digamos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

Alternantes de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase $2_{\{0,\dots,n-2\}}$ no son transitivos en facetas.
* Sus facetas son regulares y tienen dos tipos de ellas, digamos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.
* Hay $2k$ facetas alrededor de cada $(n-3)$-cara, k isomorfas a $\mathcal{P}$ y k isomorfas a $\mathcal{Q}$, y se acomodan alternadamente.

Alternantes de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase $2_{\{0,\ldots,n-2\}}$ no son transitivos en facetas.
* Sus facetas son regulares y tienen dos tipos de ellas, digamos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.
* Hay $2k$ facetas alrededor de cada $(n-3)$-cara, k isomorfas a $\mathcal{P}$ y k isomorfas a $\mathcal{Q}$, y se acomodan alternadamente.
* Podemos generalizar la noción de tipo: $\{{}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$

Alternantes de 2 orbitas

* Los n-politopos de clase $2_{\{0,\dots,n-2\}}$ no son transitivos en facetas.
* Sus facetas son regulares y tienen dos tipos de ellas, digamos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.
* Hay $2k$ facetas alrededor de cada $(n-3)$-cara, k isomorfas a $\mathcal{P}$ y k isomorfas a $\mathcal{Q}$, y se acomodan alternadamente.
* Podemos generalizar la noción de tipo: $\left\{{}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\right\}$

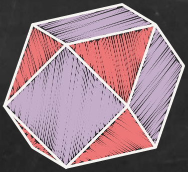


Figura: $\left\{{}^{4}_{3}, 2\right\}$

Alternantes de 2 orbitas

Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ politopos regulares y compatibles (y k)¿ existe un politopo alternante de 2 órbitas de tipo $\left\{ {\mathcal{P} \atop \mathcal{Q}}, k \right\}$?

Alternantes de 2 órbitas

Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ politopos regulares y compatibles (y k)¿ existe un politopo alternante de 2 órbitas de tipo $\left\{\begin{smallmatrix}\mathcal{P}\\\mathcal{Q}\end{smallmatrix}, k\right\}$?

* (Schulte, Monson - 2012) Caracterización de los grupos de automorfismos de tales politopos.

Alternantes de 2 órbitas

Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ politopos regulares y compatibles (y k) ¿ existe un politopo alternante de 2 órbitas de tipo $\left\{ {}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k \right\}$?

* (Schulte, Monson - 2012) Caracterización de los grupos de automorfismos de tales politopos.

* (Schulte, Monson - 2019, 2020) Dos construcciones universales:

Alternantes de 2 órbitas

Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ politopos regulares y compatibles (y k) ¿ existe un politopo alternante de 2 órbitas de tipo $\left\{ {}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k \right\}$?

* (Schulte, Monson - 2012) Caracterización de los grupos de automorfismos de tales politopos.

* (Schulte, Monson - 2019, 2020) Dos construcciones universales:
  - $\mathcal{U}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$: Universal alternante de tipo $\left\{ {}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, \infty \right\}$

Alternantes de 2 orbitas

Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ politopos regulares y compatibles (y k)¿ existe un politopo alternante de 2 órbitas de tipo $\{^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$?

* (Schulte, Monson - 2012) Caracterización de los grupos de automorfismos de tales politopos.

* (Schulte, Monson - 2019, 2020) Dos construcciones universales:
  - $\mathcal{U}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$: Universal alternante de tipo $\{^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, \infty\}$
  - $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$: Universal alternante de tipo $\{^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$

Alternantes de 2 orbitas

* Existen ejemplos de $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, k)$ tal que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ no existe y más aún, tales que no existe alternante de dos órbitas de tipo $\{^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$.

Alternantes de 2 orbitas

- Existen ejemplos de $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, k)$ tal que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ no existe y más aún, tales que no existe alternante de dos órbitas de tipo $\{^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$.

- Conjectura: Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, existen una infinidad de k tales que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ existe.

Alternantes de 2 orbitas

* Existen ejemplos de $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, k)$ tal que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ no existe y más aún, tales que no existe alternante de dos órbitas de tipo $\{^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$.
* Conjectura: Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, existen una infinidad de k tales que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ existe.
* Conjectura: Existen una infinidad de k para las cuales existen $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tal que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ no existe.

Alternantes de 2 orbitas

* Existen ejemplos de $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, k)$ tal que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ no existe y más aún, tales que no existe alternante de dos órbitas de tipo $\{{}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$.
* Conjectura: Dados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, existen una infinidad de k tales que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ existe.
* Conjectura: Existen una infinidad de k para las cuales existen $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tal que $\mathcal{U}^k_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ no existe.
* Problema Caracterizar las ternas $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, k)$ para las cuales existe un politopo alternante (finito) de tipo $\{{}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}, k\}$.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* (Cunningham, Pellicer - 2018): Una lista con más de 30 problemas para politopos de k-órbitas.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* (Cunningham, Pellicer - 2018): Una lista con más de 30 problemas para politopos de k-órbitas.
* (Cunningham, Del Río Francos, Hubard, Toledo - 2015): Generadores y relaciones para los politopos de k órbitas.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* (Cunningham, Pellicer - 2018): Una lista con más de 30 problemas para politopos de k-órbitas.
* (Cunningham, Del Río Francos, Hubard, Toledo - 2015): Generadores y relaciones para los politopos de k órbitas.
* (Hubard, Mochán, 2022 $^+$): Propiedad de la intersección para k-orbitas.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* (Cunningham, Pellicer - 2018): Una lista con más de 30 problemas para politopos de k-órbitas.
* (Cunningham, Del Río Francos, Hubard, Toledo - 2015): Generadores y relaciones para los politopos de k órbitas.
* (Hubard, Mochán, 2022 $^{+}$): Propiedad de la intersección para k-orbitas.
* Algunas técnicas clásicas de extensiones funcionan también en k-órbitas (como $2^{\mathcal{K}}$ y construcciones relacionadas).

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* Problema: Dado un politopo regular $\mathcal{K}$, existe a una extensión de k orbitas de $\mathcal{K}$.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* Problema: Dado un politopo regular $\mathcal{K}$, existe a una extensión de k orbitas de $\mathcal{K}$.
* Problema: Dado un politopo $\mathcal{K}$ de k órbitas, existe una extensión universal de $\mathcal{K}$ de k órbitas.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* Problema: Dado un politopo regular $\mathcal{K}$, existe a una extensión de k orbitas de $\mathcal{K}$.
* Problema: Dado un politopo $\mathcal{K}$ de k órbitas, existe una extensión universal de $\mathcal{K}$ de k órbitas.
* Problema: ¿Cómo son las ternas $(\mathcal{K}, k, m)$ tal que $\mathcal{K}$ es un politopo de k órbitas que admite una extensión de m órbitas.

k órbitas

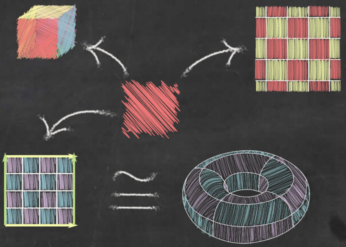
Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

* Problema: Dado un politopo regular $\mathcal{K}$, existe a una extensión de k orbitas de $\mathcal{K}$.
* Problema: Dado un politopo $\mathcal{K}$ de k órbitas, existe una extensión universal de $\mathcal{K}$ de k órbitas.
* Problema: ¿Cómo son las ternas $(\mathcal{K}, k, m)$ tal que $\mathcal{K}$ es un politopo de k órbitas que admite una extensión de m órbitas.
* Trabajo en curso (Hubard, Mochán, M.): operaciones en maniplexes y politopos.

k órbitas

Se sabe muy poco acerca de politopos de k orbitas para $k \geqslant 3$.

- Problema: Dado un politopo regular $\mathcal{K}$, existe a una extensión de k orbitas de $\mathcal{K}$.
- Problema: Dado un politopo $\mathcal{K}$ de k órbitas, existe una extensión universal de $\mathcal{K}$ de k órbitas.
- Problema: ¿Cómo son las ternas $(\mathcal{K}, k, m)$ tal que $\mathcal{K}$ es un politopo de k órbitas que admite una extensión de m órbitas.
- Trabajo en curso (Hubard, Mochán, M.): operaciones en maniplexes y politopos.
- Trabajo en curso (Cunningham, Mochán, M.): extensiones de maniplexes y politopos.



¡Gracias!