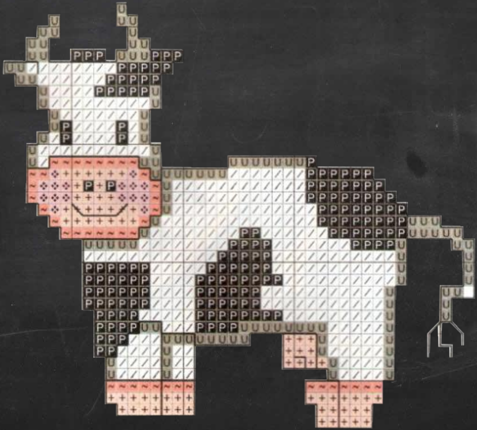
Simetrías de toros cuadriculados

Antonio Montero
José Collins

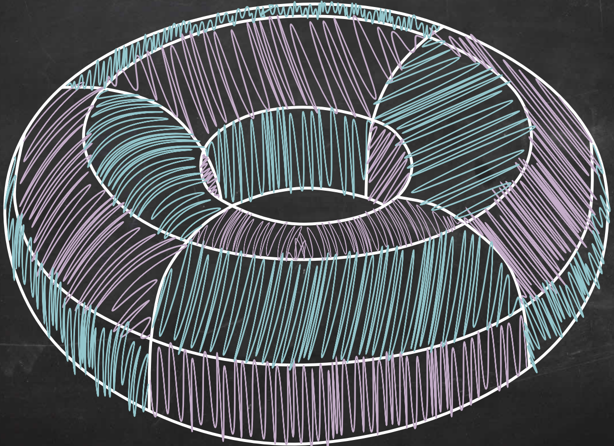
Centro de Ciencias Matemáticas - UNAM

Seminario de Estudiantes CIMAT
10 de Noviembre de 2017

Toros cuadriculados



Toros cuadriculados

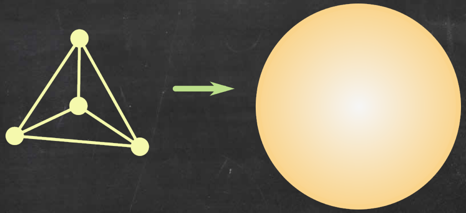


Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.

Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.

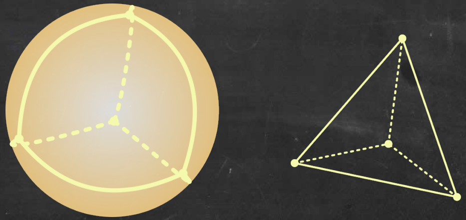


Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.

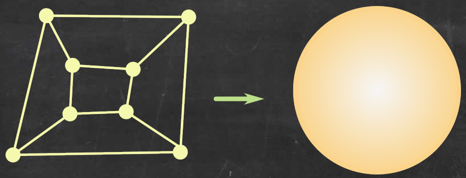
Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.



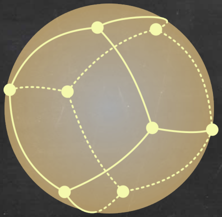
Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.



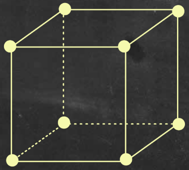
Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.



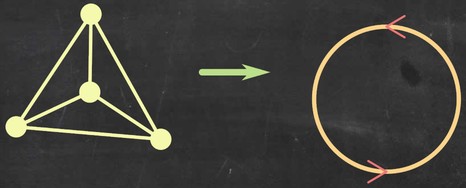
Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.



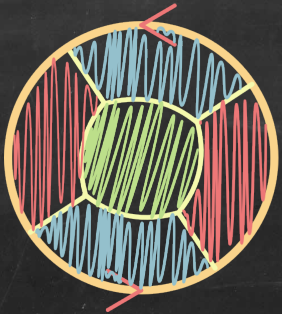
Mapas

Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.

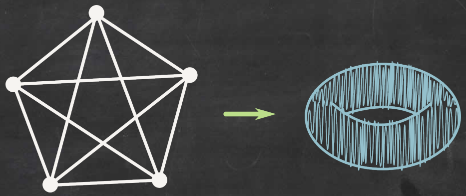


Mapas

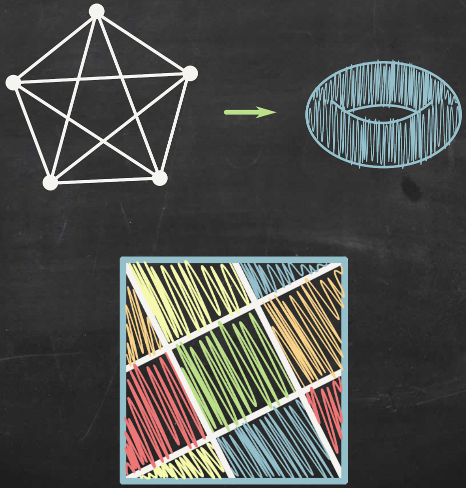
Un mapa $\mathcal{M} = (G, i, S)$ consta de un encaje i de una gráfica G en una superficie S de tal forma que las componentes conexas de $S \setminus i(G)$ (caras) son topológicamente discos.



Mapas



Mapas



Mapas

¿Cómo generalizamos esto a dimensiones superiores?

* No es obvio...

Mapas
¿Cómo generalizamos esto a dimensiones superiores?

* No es obvio...

* Generalizaciones combinatorias (algebraicas):
    - Politopos Abstractos.
    - Maniplexes.

Mapas

¿Cómo generalizamos esto a dimensiones superiores?

* No es obvio...

* Generalizaciones combinatorias (algebraicas):
  - Politopos Abstractos.
  - Maniplexes.

* Estas generalizaciones pierden el espíritu topológico (geométrico) de los mapas...

Mapas

Teorema (Uniformización, Poincaré 1907)
Toda superficie S es homeomorfa a X/Λ donde $X \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}^2\}$ y Λ es un grupo discreto de isometrías de X sin puntos fijos.

Mapas

Teorema (Uniformización, Poincaré 1907)
Toda superficie S es homeomorfa a X/Λ donde $X \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}^2\}$ y Λ es un grupo discreto de isometrías de X sin puntos fijos.

Un mapa $\mathcal{M}$ en una superficie $S = X/\Lambda$ induce una teselación $\mathcal{U}$ de X tal que Λ es un grupo de isometrías de $\mathcal{U}$.

Mapas

Teorema (Uniformización, Poincaré 1907)

Toda superficie S es homeomorfa a X/Λ donde $X \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}^2\}$ y Λ es un grupo discreto de isometrías de X sin puntos fijos.

Un mapa $\mathcal{M}$ en una superficie $S = X/\Lambda$ induce una teselación $\mathcal{U}$ de X tal que Λ es un grupo de isometrías de $\mathcal{U}$.

Si $X \to S$ es la función cociente, entonces

* $\{\text{Vértices de } \mathcal{U}\} \to \{\text{Vértices de } \mathcal{M}\}$.

Mapas

Teorema (Uniformización, Poincaré 1907)
Toda superficie S es homeomorfa a X/Λ donde $X \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}^2\}$ y Λ es un grupo discreto de isometrías de X sin puntos fijos.

Un mapa $\mathcal{M}$ en una superficie $S = X/\Lambda$ induce una teselación $\mathcal{U}$ de X tal que Λ es un grupo de isometrías de $\mathcal{U}$.

Si $X \to S$ es la función cociente, entonces

* $\{$Vértices de $\mathcal{U}\} \to \{$Vértices de $\mathcal{M}\}$.
* $\{$Aristas de $\mathcal{U}\} \to \{$Aristas de $\mathcal{M}\}$.

Mapas

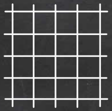
Teorema (Uniformización, Poincaré 1907)
Toda superficie $\mathcal{S}$ es homeomorfa a X/Λ donde $X \in \{\mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}^2\}$ y Λ es un grupo discreto de isometrías de X sin puntos fijos.

Un mapa $\mathcal{M}$ en una superficie $S = X/\Lambda$ induce una teselación $\mathcal{U}$ de X tal que Λ es un grupo de isometrías de $\mathcal{U}$.

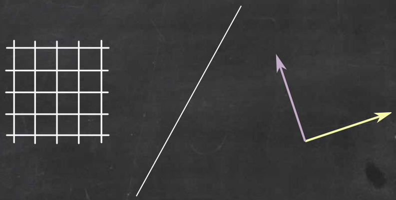
Si $X \to S$ es la función cociente, entonces

* $\{$Vértices de $\mathcal{U}\} \to \{$Vértices de $\mathcal{M}\}$.
* $\{$Aristas de $\mathcal{U}\} \to \{$Aristas de $\mathcal{M}\}$.
* $\{$Caras de $\mathcal{U}\} \to \{$Caras de $\mathcal{M}\}$.

Mapas



Mapas



Mapas

Toros cuadriculados

Un toro teselado n-dimensional es el cociente de una teselación $\mathcal{U}$ de $\mathbb{E}^n$ por un grupo latiz $\Lambda \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

Toros cuadriculados

Un toro teselado n-dimensional es el cociente de una teselación $\mathcal{U}$ de $\mathbb{E}^n$ por un grupo latiz $\Lambda \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

Un toro teselado $\mathcal{U}/\Lambda$ es cuadriculado si $\mathcal{U}$ es la teselación de cubos de $\mathbb{E}^n$.

Toros cuadriculados

Un **toro teselado** n-dimensional es el cociente de una teselación $\mathcal{U}$ de $\mathbb{E}^n$ por un **grupo latiz** $\Lambda \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

Un toro teselado $\mathcal{U}/\Lambda$ es **cuadriculado** si $\mathcal{U}$ es la teselación de cubos de $\mathbb{E}^n$.

* Vértices de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de vértices de $\mathcal{U}$ bajo Λ.

Toros cuadriculados

Un toro teselado n-dimensional es el cociente de una teselación $\mathcal{U}$ de $\mathbb{E}^n$ por un grupo latiz $\Lambda \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

Un toro teselado $\mathcal{U}/\Lambda$ es cuadriculado si $\mathcal{U}$ es la teselación de cubos de $\mathbb{E}^n$.

* Vértices de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de vértices de $\mathcal{U}$ bajo Λ.
* Aristas de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de aristas de $\mathcal{U}$ bajo Λ.

Toros cuadriculados

Un toro teselado n-dimensional es el cociente de una teselación $\mathcal{U}$ de $\mathbb{E}^n$ por un grupo latiz $\Lambda \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

Un toro teselado $\mathcal{U}/\Lambda$ es cuadriculado si $\mathcal{U}$ es la teselación de cubos de $\mathbb{E}^n$.

* Vértices de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de vértices de $\mathcal{U}$ bajo Λ.
* Aristas de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de aristas de $\mathcal{U}$ bajo Λ.
* ...

Toros cuadriculados

Un toro teselado n-dimensional es el cociente de una teselación $\mathcal{U}$ de $\mathbb{E}^n$ por un grupo latiz $\Lambda \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

Un toro teselado $\mathcal{U}/\Lambda$ es cuadriculado si $\mathcal{U}$ es la teselación de cubos de $\mathbb{E}^n$.

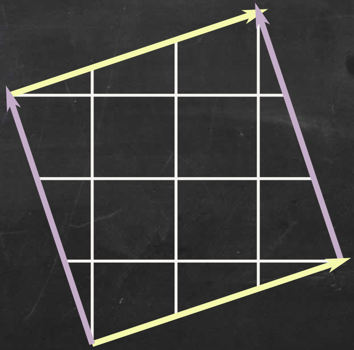
- Vértices de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de vértices de $\mathcal{U}$ bajo Λ.
- Aristas de $\mathcal{U}/\Lambda$: Órbitas de aristas de $\mathcal{U}$ bajo Λ.
- ...
- Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.

Toros cuadriculados

* Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.

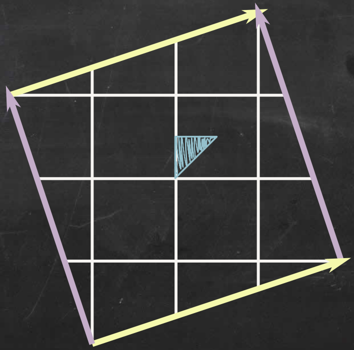
Toros cuadriculados

- Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.

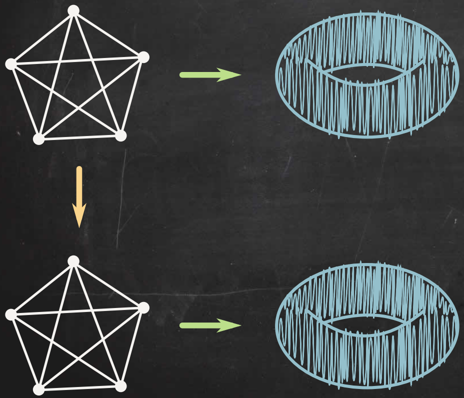


Toros cuadriculados

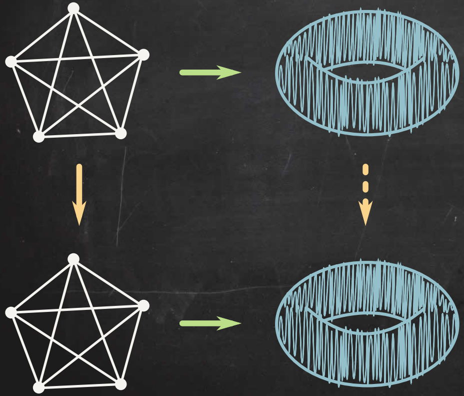
* Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.



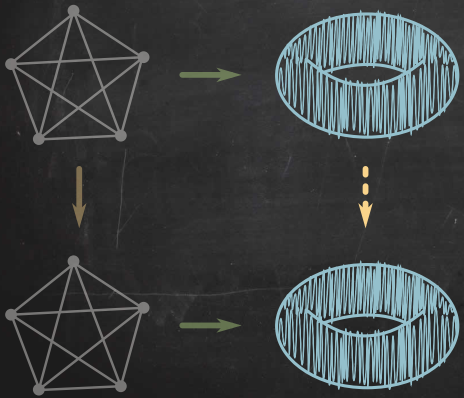
¿Simetrías?



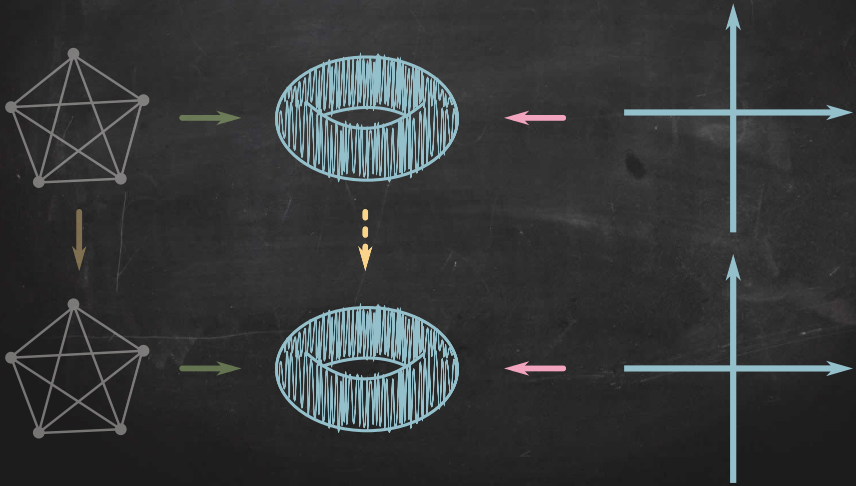
¿Simetrías?



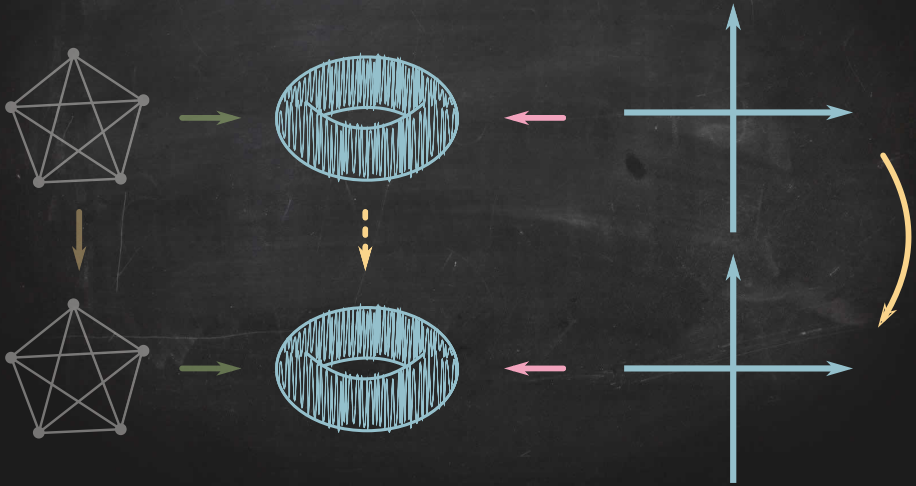
¿Simetrías?



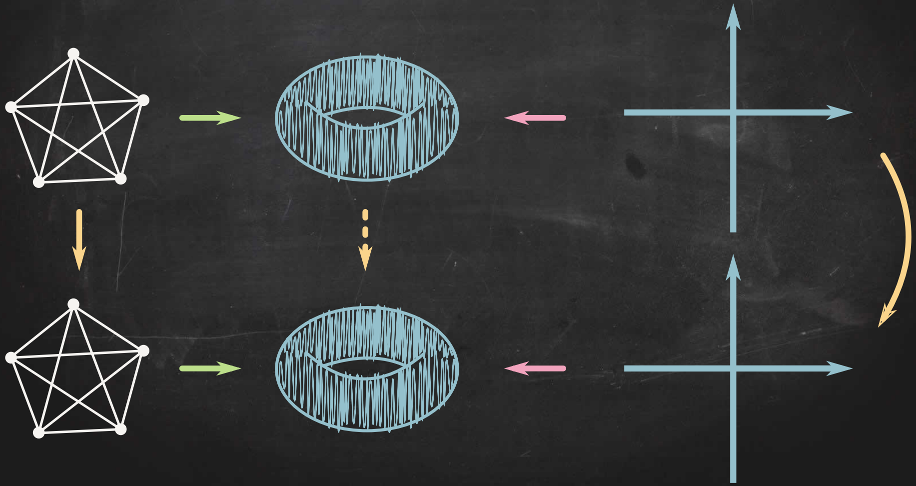
¿Simetrías?



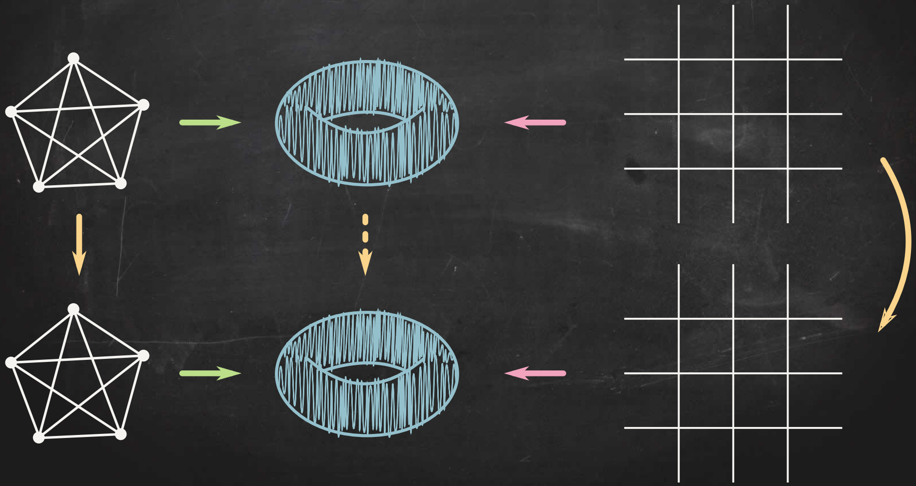
¿Simetrías?



¿Simetrías?



¿Simetrías?



Simetrías de toros cuadriculados

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "S"] \arrow[d] & \mathcal{U} \arrow[d] \\ \mathcal{U}/\Lambda \arrow[r, dashed, "\overline{S}"] & \mathcal{U}/\Lambda \end{tikzcd}$$

* ¿Cuándo una isometría S "es compatible" con el cociente?

Simetrías de toros cuadriculados

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{U} & \xrightarrow{S} & \mathcal{U} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U}/\Lambda & \overset{\overline{S}}{\dashrightarrow} & \mathcal{U}/\Lambda
\end{array}
$$

* ¿Cuándo una isometría S "es compatible" con el cociente?
* Resulta que esto ocurre si y solo si $S \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.

Simetrías de toros cuadriculados

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{S} & \mathcal{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}/\Lambda & \overset{\bar{S}}{\dashrightarrow} & \mathcal{U}/\Lambda \end{array}$$

* ¿Cuándo una isometría S "es compatible" con el cociente?
* Resulta que esto ocurre si y solo si $S \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
* Los elementos de Λ actúan trivialmente $\mathcal{U}/\Lambda$.

Simetrías de toros cuadriculados

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "S"] \arrow[d] & \mathcal{U} \arrow[d] \\ \mathcal{U}/\Lambda \arrow[r, dashed, "\overline{S}"] & \mathcal{U}/\Lambda \end{tikzcd}$$

* ¿Cuándo una isometría S "es compatible" con el cociente?
* Resulta que esto ocurre si y solo si $S \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
* Los elementos de Λ actúan trivialmente $\mathcal{U}/\Lambda$.
* Esto nos permite definir

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda.$$

Simetrías de toros cuadriculados

* Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.

Simetrías de toros cuadriculados

* Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.
* Hay una acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ en el conjunto de banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$.

Simetrías de toros cuadriculados

* Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.
* Hay una acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ en el conjunto de banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$.
* Esta acción es libre.

Simetrías de toros cuadriculados

* Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.
* Hay una acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ en el conjunto de banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$.
* Esta acción es libre.
* Un toro cuadriculado es regular si $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ actúa transitivamente en las banderas.

Simetrías de toros cuadriculados

- Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.
- Hay una acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ en el conjunto de banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$.
- Esta acción es libre.
- Un toro cuadriculado es regular si $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ actúa transitivamente en las banderas.

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...

Simetrías de toros cuadriculados

- Banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$: $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.
- Hay una acción de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ en el conjunto de banderas de $\mathcal{U}/\Lambda$.
- Esta acción es libre.
- Un toro cuadriculado es regular si $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ actúa transitivamente en las banderas.

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?

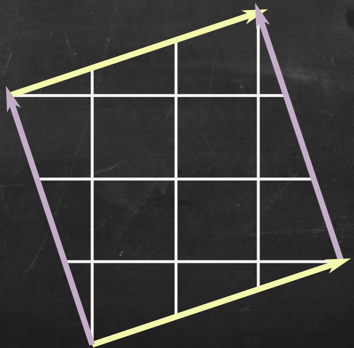
Simetrías de toros cuadriculados

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?

Simetrías de toros cuadriculados

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...

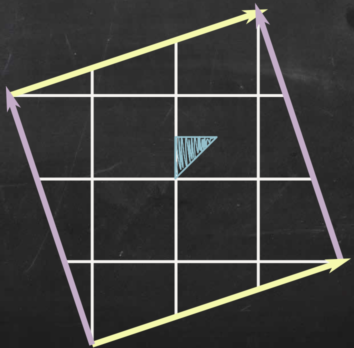
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?



Simetrías de toros cuadriculados

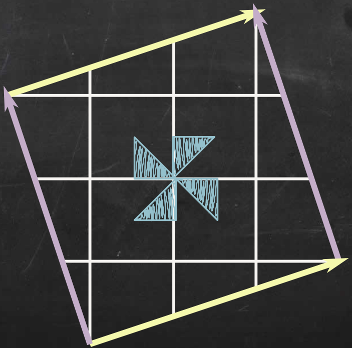
Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...

... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?



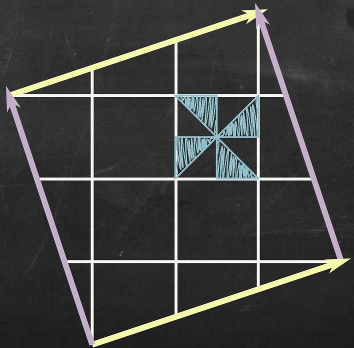
Simetrías de toros cuadriculados

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?



Simetrías de toros cuadriculados

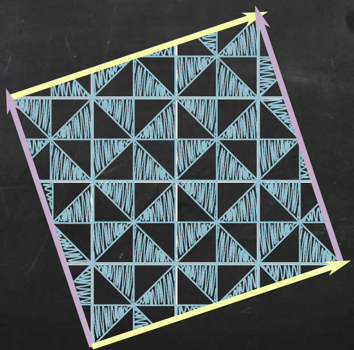
Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?



Simetrías de toros cuadriculados

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...

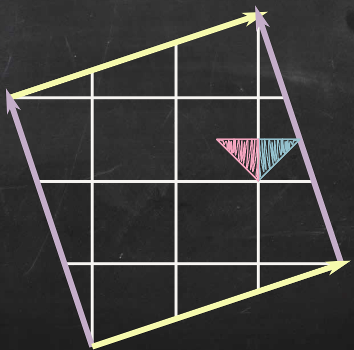
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?



Simetrías de toros cuadriculados

Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...

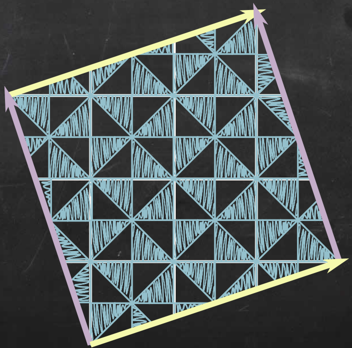
... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?



Simetrías de toros cuadriculados

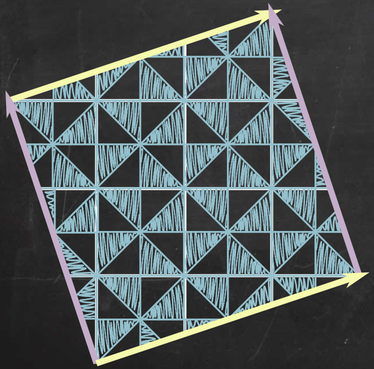
Suponga que $\mathcal{U}$ es regular...

... será que todo toro cuadriculado $\mathcal{U}/\Lambda$ es regular?

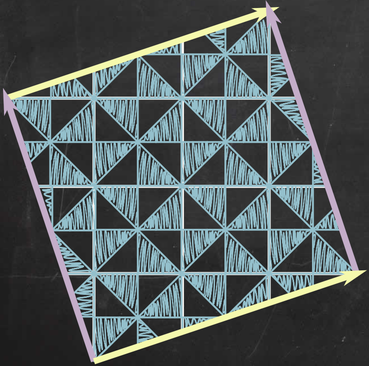


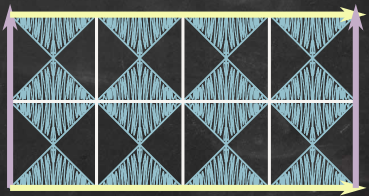
¿Son éstas todas las posibilidades?

¿Son éstas todas las posibilidades?



¿Son éstas todas las posibilidades?





Problema:

Clasificar toros cuadriculados hasta tipo de simetría.

Problema:
Clasificar toros cuadriculados hasta tipo de simetría.

¿Cuántas órbitas de banderas tienen?

Problema:
Clasificar toros cuadriculados hasta tipo de simetría.

¿Cuántas órbitas de banderas tienen?

¿Cómo se acomodan localmente estas órbitas?

¿Qué sabemos?

¿Qué sabemos?

* Los toros cuadriculados n-dimensionales regulares están clasificados:
  - Si $n = 2$ existen dos familias. (Coxeter, 1948)

¿Qué sabemos?

* Los toros cuadriculados n-dimensionales regulares están clasificados:
  - Si $n = 2$ existen dos familias. (Coxeter, 1948)
  - Si $n \geqslant 3$ hay tres familias. (McMullen and Schulte, 1996)

¿Qué sabemos?

- Los toros cuadriculados n-dimensionales regulares están clasificados:
  - Si $n = 2$ existen dos familias. (Coxeter, 1948)
  - Si $n \geqslant 3$ hay tres familias. (McMullen and Schulte, 1996)

- Toros cuadriculados quirales sólo existen en dimensión 2 (mapas quirales). (Hartley, McMullen and Schulte, 1999)

¿Qué sabemos?

¿Qué pasa con dimensiones superiores?

¿Qué sabemos?

¿Qué pasa con dimensiones superiores?

* Toros cuadriculados de dimensión 2 están clasificados (Brehm y Kühnel, 2008, Hubard, Orbanic, Pellicer and Weiss, 2012)

¿Qué sabemos?

¿Qué pasa con dimensiones superiores?

* Toros cuadriculados de dimensión 2 están clasificados (Brehm y Kühnel, 2008, Hubard, Orbanic, Pellicer and Weiss, 2012)
* Toros cuadriculados de dimensión 3 también están clasificados (Hubard, Orbanic, Pellicer y Weiss, 2012)

¿Qué sabemos?

¿Qué pasa con dimensiones superiores?

* Toros cuadriculados de dimensión 2 están clasificados (Brehm y Kühnel, 2008, Hubard, Orbanic, Pellicer and Weiss, 2012)
* Toros cuadriculados de dimensión 3 también están clasificados (Hubard, Orbanic, Pellicer y Weiss, 2012)
  - Corolario: No existen toros cuadriculados de dimensión 3 con 2 orbitas en banderas.

¿Qué sabemos?

¿Qué pasa con dimensiones superiores?

* Toros cuadriculados de dimensión 2 están clasificados (Brehm y Kühnel, 2008, Hubard, Orbanic, Pellicer and Weiss, 2012)
* Toros cuadriculados de dimensión 3 también están clasificados (Hubard, Orbanic, Pellicer y Weiss, 2012)
  - Corolario: No existen toros cuadriculados de dimensión 3 con 2 orbitas en banderas.
  - P: ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados con 2 órbitas?

¿Qué sabemos?

¿Qué pasa con dimensiones superiores?

* Toros cuadriculados de dimensión 2 están clasificados (Brehm y Kühnel, 2008, Hubard, Orbanic, Pellicer and Weiss, 2012)
* Toros cuadriculados de dimensión 3 también están clasificados (Hubard, Orbanic, Pellicer y Weiss, 2012)
  - Corolario: No existen toros cuadriculados de dimensión 3 con 2 orbitas en banderas.
  - P: ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados con 2 órbitas?
  - P: ¿Siquiera existen para $n > 3$?

A ver, pérate...

A ver, pérate...

* Recordemos que $\mathsf{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathsf{Norm}_{\mathsf{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.

A ver, pérate...

* Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
* $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.

A ver, pérate...

* Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
* $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
* En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

A ver, pérate...

* Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
* $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
* En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.
* Si t es una traslación de $\mathcal{U}$, entonces $t \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.

A ver, pérate...

* Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
* $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
* En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.
* Si t es una traslación de $\mathcal{U}$, entonces $t \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
* $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S$ donde S es el estabilizador de un vértice o.

A ver, pérate...

- Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
- $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
- En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.
- Si t es una traslación de $\mathcal{U}$, entonces $t \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
- $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S$ donde S es el estabilizador de un vértice o.
- $s = ts' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$ si y solo si $s' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.

A ver, pérate...

- Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
- $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
- En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.
- Si t es una traslación de $\mathcal{U}$, entonces $t \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
- $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S$ donde S es el estabilizador de un vértice o.
- $s = ts' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$ si y solo si $s' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
- $s \in S$ normaliza a Λ si y solo si s preserva $o\Lambda$.

A ver, pérate...

- Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
- $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
- En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.
- Si t es una traslación de $\mathcal{U}$, entonces $t \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
- $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S$ donde S es el estabilizador de un vértice o.
- $s = ts' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$ si y solo si $s' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
- $s \in S$ normaliza a Λ si y solo si s preserva $o\Lambda$.
- $-id : x \mapsto -x$ siempre $o\Lambda$.

A ver, pérate...

* Recordemos que $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)/\Lambda$.
* $\mathcal{U}/\Lambda$ podría no ser regular, incluso si $\mathcal{U}$ lo es.
* En los ejemplos, $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda) \lneq \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.
* Si t es una traslación de $\mathcal{U}$, entonces $t \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
* $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S$ donde S es el estabilizador de un vértice o.
* $s = ts' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$ si y solo si $s' \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{U})}(\Lambda)$.
* $s \in S$ normaliza a Λ si y solo si s preserva $o\Lambda$.
* $-id : x \mapsto -x$ siempre $o\Lambda$.
* $\mathcal{U}/\Lambda \cong \mathcal{U}/\Lambda'$ si y solo si Λ and Λ son conjugados en $\mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N/\Lambda \\ N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id \rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N/\Lambda \\ N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id\rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id\rangle = T(\mathcal{U}) \rtimes \langle -id\rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N/\Lambda \\ N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id\rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id\rangle = T(\mathcal{U}) \rtimes \langle -id\rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Tipos de simetría}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación de} \\ \langle -id\rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N/\Lambda \\ N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id \rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Toros cuadriculados}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} N \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U}) \rtimes S \\ \langle T(\mathcal{U}), -id \rangle = T(\mathcal{U}) \rtimes \langle -id \rangle \leqslant N \end{array} \right\}$$

$$\{\text{Tipos de simetría}\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación de} \\ \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\}$$

Número de órbitas en banderas $= [\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) : N] = [S : N']$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Candidatos para el} \\ \text{grupo de automorfismos}\end{array}\right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Candidatos para el} \\ \text{grupo de automorfismos} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Clasificación de} \\ \text{toros cuadriculados} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Candidatos para el} \\ \text{grupo de automorfismos} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Clasificación de} \\ \text{toros cuadriculados} \end{array}$$

Dos problemas con esta técnica:

* Solo se resuelve la mitad del problema.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Candidatos para el} \\ \text{grupo de automorfismos} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Clasificación de} \\ \text{toros cuadriculados} \end{array}$$

Dos problemas con esta técnica:

* Solo se resuelve la mitad del problema.
* No es nada práctica

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Candidatos para el} \\ \text{grupo de automorfismos} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Clasificación de} \\ \text{toros cuadriculados} \end{array}$$

Dos problemas con esta técnica:

* Solo se resuelve la mitad del problema.
* No es nada práctica, el grupo S es ENORME: $2^n n!$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Candidatos para el} \\ \text{grupo de automorfismos} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Clasificación de} \\ \text{toros cuadriculados} \end{array}$$

Dos problemas con esta técnica:

* Solo se resuelve la mitad del problema.
* No es nada práctica, el grupo S es ENORME: $2^n n!$.
* Aún puede resultar útil...

Toros cuadriculados de pocas órbitas

Un toro cuadriculado n-dimensional $\mathcal{U}/\Lambda$ es de pocas órbitas si el número de órbitas en banderas de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ es a lo más n.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

Un toro cuadriculado n-dimensional $\mathcal{U}/\Lambda$ es de pocas órbitas si el número de órbitas en banderas de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ es a lo más n.

* Los toros cuadriculados regulares son de pocas órbitas.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

Un toro cuadriculado n-dimensional $\mathcal{U}/\Lambda$ es de pocas órbitas si el número de órbitas en banderas de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ es a lo más n.

- Los toros cuadriculados regulares son de pocas órbitas.
- Los toros cuadriculados de 2 órbitas son de pocas órbitas.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

Un toro cuadriculado n-dimensional $\mathcal{U}/\Lambda$ es de pocas órbitas si el número de órbitas en banderas de $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\Lambda)$ es a lo más n.

* Los toros cuadriculados regulares son de pocas órbitas.
* Los toros cuadriculados de 2 órbitas son de pocas órbitas.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de conjugación} \\ \text{de } \langle -id \rangle \leqslant N' \leqslant S \\ [S : N'] \leqslant n \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Clasificación de toros} \\ \text{de pocas órbitas} \end{array}$$

Toros cuadriculados de pocas órbitas

* Toros cuadriculados regulares.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

* Toros cuadriculados regulares.
* Toros cuadriculados de dos órbitas:
  - Si n es impar, entonces no existen.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

- Toros cuadriculados regulares.
- Toros cuadriculados de dos órbitas:
  - Si n es impar, entonces no existen.
  - Si n es par, existe exactamente una familia.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

* Toros cuadriculados regulares.
* Toros cuadriculados de dos órbitas:
  - Si n es impar, entonces no existen.
  - Si n es par, existe exactamente una familia.
* Si $n = 4$
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 2 órbitas.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

- Toros cuadriculados regulares.
- Toros cuadriculados de dos órbitas:
  - Si n es impar, entonces no existen.
  - Si n es par, existe exactamente una familia.
- Si $n = 4$
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 2 órbitas.
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 3 órbitas.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

* Toros cuadriculados regulares.
* Toros cuadriculados de dos órbitas:
  - Si n es impar, entonces no existen.
  - Si n es par, existe exactamente una familia.
* Si $n = 4$
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 2 órbitas.
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 3 órbitas.
* Si $n \geqslant 5$, no existen toros cuadriculados con k orbitas para $2 < k < n$.

Toros cuadriculados de pocas órbitas

* Toros cuadriculados regulares.
* Toros cuadriculados de dos órbitas:
  - Si n es impar, entonces no existen.
  - Si n es par, existe exactamente una familia.
* Si $n = 4$
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 2 órbitas.
  - Existe una familia de toros cuadriculados de 3 órbitas.
* Si $n \geqslant 5$, no existen toros cuadriculados con k orbitas para $2 < k < n$.
* Para todo $n \geqslant 4$ existen 5 familias de toros cuadriculados de n órbitas, todos con el mismo tipo de simetría.

Nota...

Toros teselados de pocas órbitas inducidos por otras teselaciones regulares de $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, $n = 4$) también están clasificados:

Nota...

Toros teselados de pocas órbitas inducidos por otras teselaciones regulares de $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, $n = 4$) también están clasificados:

* $n = 2$: Consecuencia de la clasificación de HOPW, 2012.

Nota...

Toros teselados de pocas órbitas inducidos por otras teselaciones regulares de $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, $n = 4$) también están clasificados:

* $n = 2$: Consecuencia de la clasificación de HOPW, 2012.
* $n = 4$:
  - Toros regulares: dos familias.

Nota...

Toros teselados de pocas órbitas inducidos por otras teselaciones regulares de $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, $n = 4$) también están clasificados:

* $n = 2$: Consecuencia de la clasificación de HOPW, 2012.
* $n = 4$:
  - Toros regulares: dos familias.
  - Toros de 2 órbitas: una familia.

Nota...

Toros teselados de pocas órbitas inducidos por otras teselaciones regulares de $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, $n = 4$) también están clasificados:

* $n = 2$: Consecuencia de la clasificación de HOPW, 2012.

* $n = 4$:
  - Toros regulares: dos familias.
  - Toros de 2 órbitas: una familia.
  - Toros de 3 órbitas: dos familias con diferente tipo de simetría.

Nota...

Toros teselados de pocas órbitas inducidos por otras teselaciones regulares de $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, $n = 4$) también están clasificados:

* $n = 2$: Consecuencia de la clasificación de HOPW, 2012.
* $n = 4$:
  - Toros regulares: dos familias.
  - Toros de 2 órbitas: una familia.
  - Toros de 3 órbitas: dos familias con diferente tipo de simetría.
  - Toros de 4 órbitas: no existen.

Problemas abiertos/trabajo a futuro

* Clasificar toros teselados con pocas órbitas inducidos por teselaciones no regulares.

Problemas abiertos/trabajo a futuro

* Clasificar toros teselados con pocas órbitas inducidos por teselaciones no regulares.
* Estudiar el fenómeno de pocas órbitas en otras variedades euclidianas

Problemas abiertos/trabajo a futuro

* Clasificar toros teselados con pocas órbitas inducidos por teselaciones no regulares.
* Estudiar el fenómeno de pocas órbitas en otras variedades euclidianas
* Lograr una clasificación completa de toros cuadriculados.

Gracias!