Toros cuadriculados y sus simetrías

Antonio Montero

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Escuela de Verano 2016
Morelia, Michoacán
29 de junio de 2016


TAKE
IT
EASY


Sobre la cantidad de números primos en el intervalo [1,x]
Propiedades fund. de la función zeta de Riemann
la serie que def a ζ converge absolutamente en Re(s)>1 y además converge unif. en todos los subconjuntos compactos de Re(s)>1
Dem. criterio M de Weierstrass
De lo anterior y el teo. de conv. compacta de Weier se sigue que ζ es holomorfa en Re(s)>1
Proposición.
CONVERSE


EN FAMILIA DISFRUTA NUESTRA VARIEDAD DE FRUTAS
JUMEX


Fly Emirates


Fly
Emirates
Fly
Emirates
Fly
Emirates
Fly
Emirates


TECATE
TECATE
Morelia EsVerl6
2 / 30

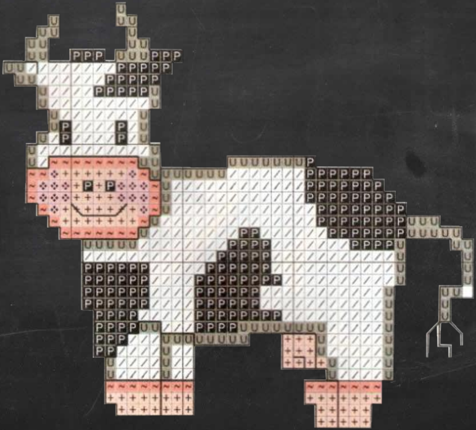
Toros cuadriculados y sus simetrías

Antonio Montero

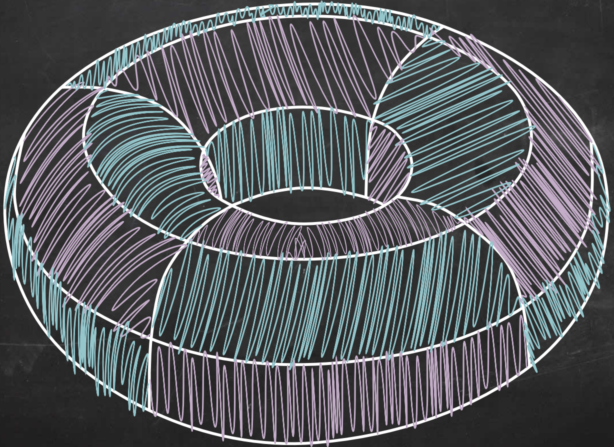
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Escuela de Verano 2016
Morelia, Michoacán
29 de junio de 2016

Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Cuadrículas

¿Qué son?

Una cuadrícula $\mathcal{U}$ del espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{E}^n$ es una familia de cubos n-dimensionales, todos iguales, que cubre al espacio de manera cara-a-cara.

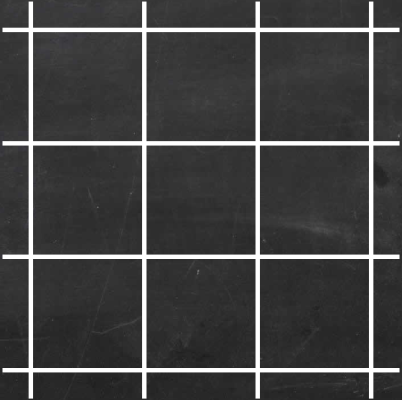
Cuadrículas

¿Qué son?

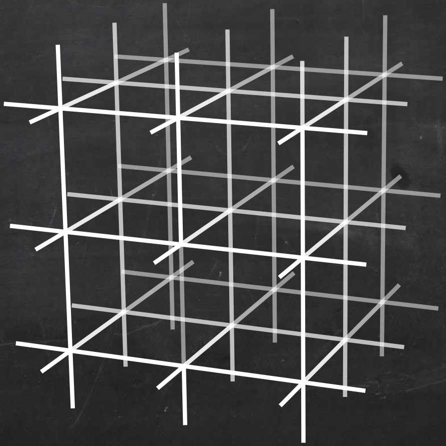
Una cuadrícula $\mathcal{U}$ del espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{E}^n$ es una familia de cubos n-dimensionales, todos iguales, que cubre al espacio de manera cara-a-cara.

* Existe una única manera de cubrir a $\mathbb{E}^n$ con cubos congruentes.

Cuadrículas



Cuadrículas

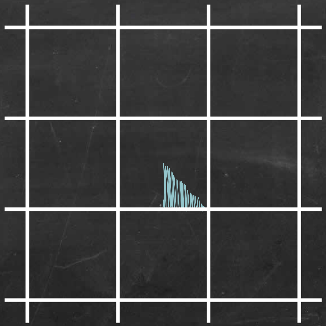


Cuadrículas

Una bandera de una cuadrícula es una sucesión $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ de elementos mutuamente incidentes, con $dim(F_i) = i$.

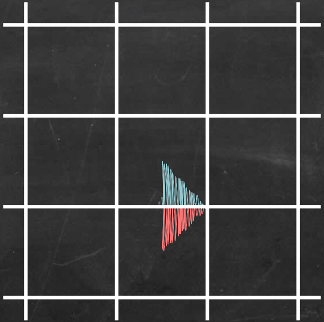
Cuadrículas

Una bandera de una cuadrícula es una sucesión $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ de elementos mutuamente incidentes, con $dim(F_i) = i$.



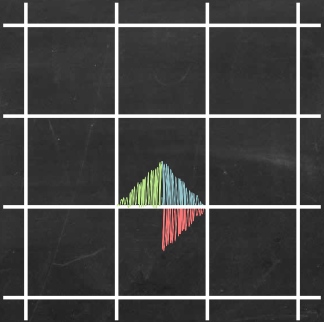
Cuadrículas

Una bandera de una cuadrícula es una sucesión $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ de elementos mutuamente incidentes, con $dim(F_i) = i$.



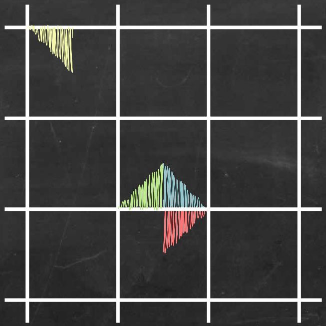
Cuadrículas

Una bandera de una cuadrícula es una sucesión $(F_0, F_1, \dots F_n)$ de elementos mutuamente incidentes, con $dim(F_i) = i$.



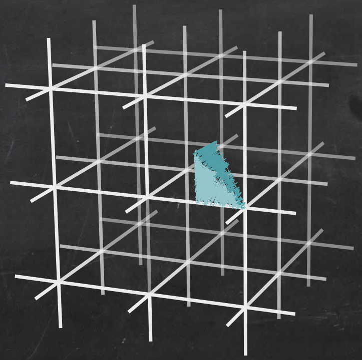
Cuadrículas

Una **bandera** de una cuadrícula es una sucesión $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ de elementos mutuamente incidentes, con $dim(F_i) = i$.



Cuadrículas

Una bandera de una cuadrícula es una sucesión $(F_0, F_1, \dots F_n)$ de elementos mutuamente incidentes, con $dim(F_i) = i$.

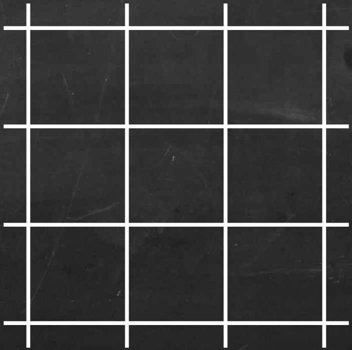


Cuadrículas
Simetrías

Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.

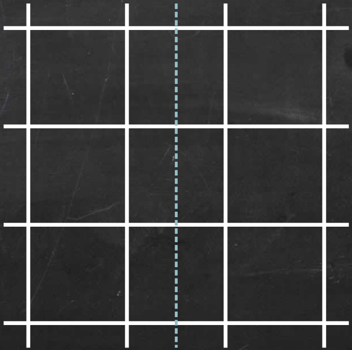
Cuadrículas
Simetrías

Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.



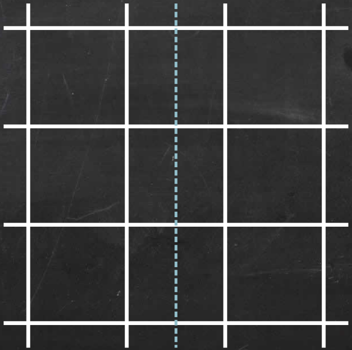
Cuadrículas
Simetrías

Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.



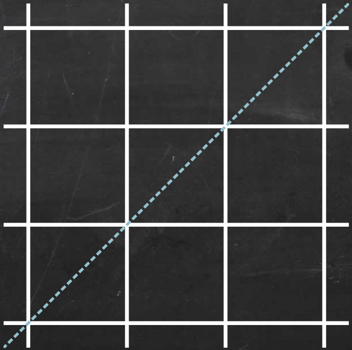
Cuadrículas
Simetrías

Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.



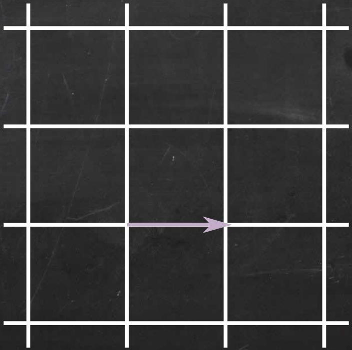
Cuadrículas
Simetrías

Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.



Cuadrículas
Simetrías

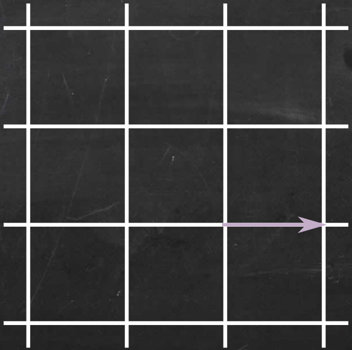
Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

Una simetría de una cuadrícula $\mathcal{U}$ es una isometría del espacio que preserva a $\mathcal{U}$ globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

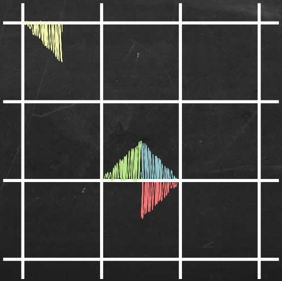
* El grupo de simetrías de una cuadrícula $\mathcal{U}$, denotado por $\Gamma(\mathcal{U})$ es el conjunto de todas las simetrías de $\mathcal{U}$ con la composición (como operación).

Cuadrículas
Simetrías

* El grupo de simetrías de una cuadrícula $\mathcal{U}$, denotado por $\Gamma(\mathcal{U})$ es el conjunto de todas las simetrías de $\mathcal{U}$ con la composición (como operación).
* La imagen de una bandera determina a lo más una simetría.

Cuadrículas
Simetrías

* El grupo de simetrías de una cuadrícula $\mathcal{U}$, denotado por $\Gamma(\mathcal{U})$ es el conjunto de todas las simetrías de $\mathcal{U}$ con la composición (como operación).
* La imagen de una bandera determina a lo más una simetría.



Cuadrículas Regulares

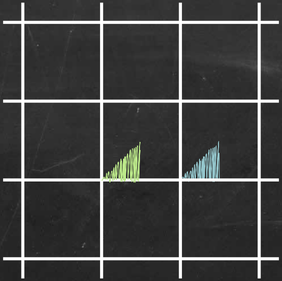
* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.

Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:

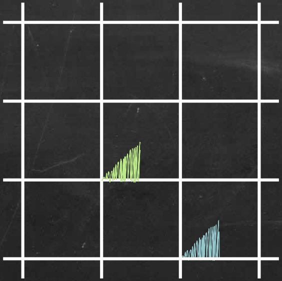
Cuadrículas Regulares

- Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
- La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



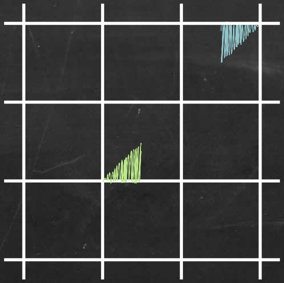
Cuadrículas Regulares

- Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
- La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



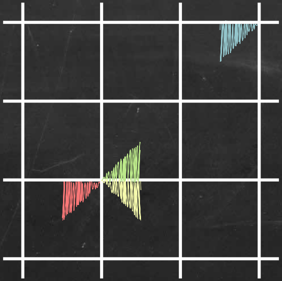
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



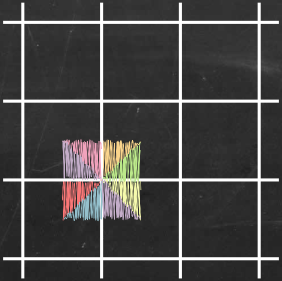
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



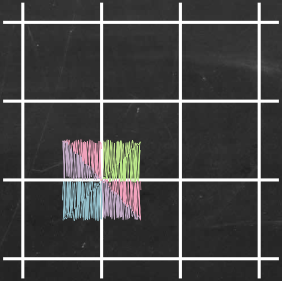
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



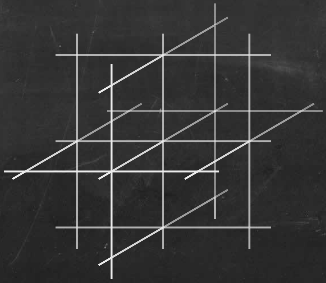
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



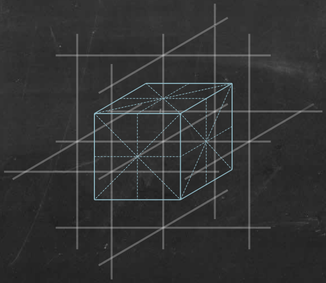
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



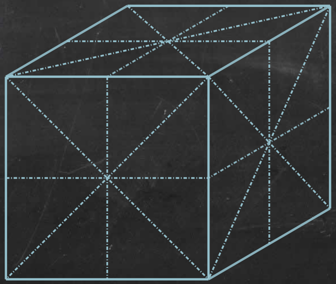
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



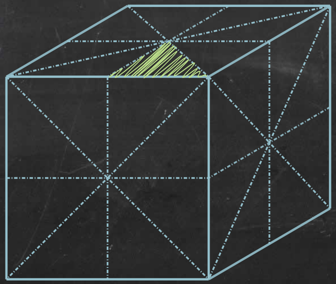
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



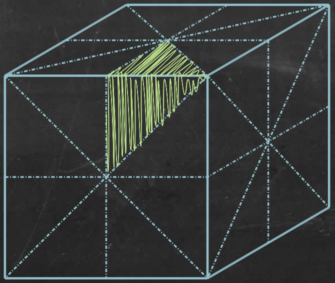
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



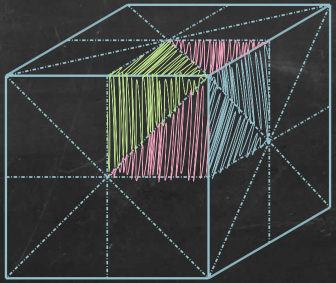
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



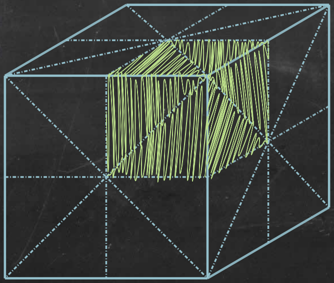
Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



Cuadrículas Regulares

* Una cuadrícula $\mathcal{U}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{U})$ actúa transitivamente en las banderas de $\mathcal{U}$.
* La cuadrícula en $\mathbb{E}^n$ es regular:



Cuadrículas Regulares

* El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.

Cuadrículas Regulares

* El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
* En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(\mathcal{U})$ tengamos:
  - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)

Cuadrículas Regulares

* El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
* En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(\mathcal{U})$ tengamos:
  - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
  - Simetrías que permutan las coordenadas.

Cuadrículas Regulares

* El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
* En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(\mathcal{U})$ tengamos:
  - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
  - Simetrías que permutan las coordenadas.
  - Simetrías que cambian de signo en una coordenada.

Cuadrículas Regulares

* El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
* En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(\mathcal{U})$ tengamos:
  - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
  - Simetrías que permutan las coordenadas.
  - Simetrías que cambian de signo en una coordenada.

¡Y todo eso lo tenemos con la cuadrícula de $\mathbb{E}^n$!...

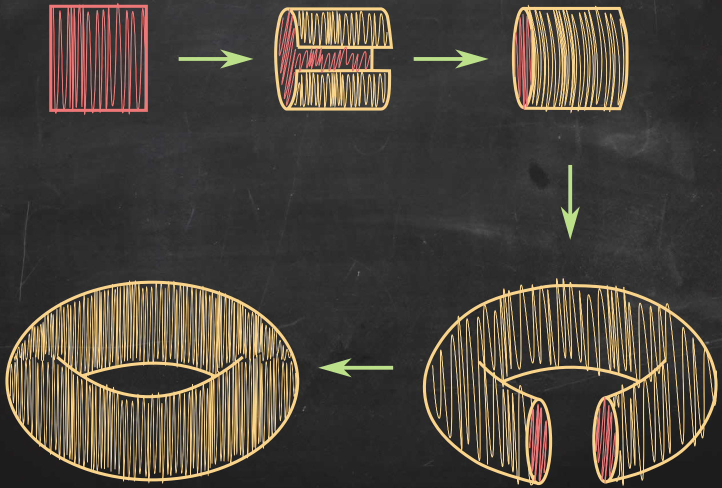
Cuadrículas Regulares

* El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
* En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(\mathcal{U})$ tengamos:
  - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
  - Simetrías que permutan las coordenadas.
  - Simetrías que cambian de signo en una coordenada.

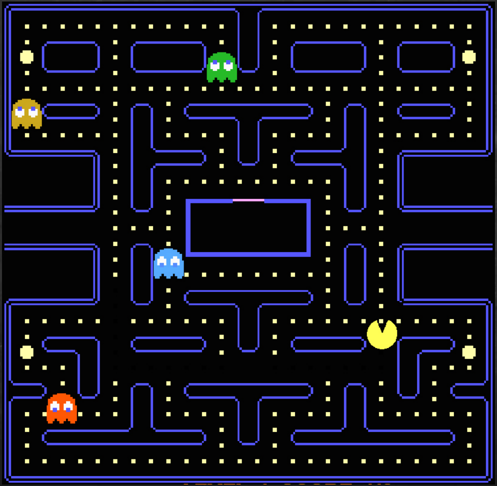
¡Y todo eso lo tenemos con la cuadrícula de $\mathbb{E}^n$!...

... de hecho, estas simetrías generan a $\Gamma(\mathcal{U})$.

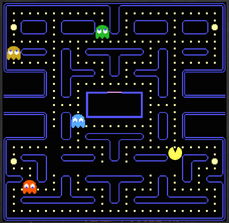
El toro



El toro

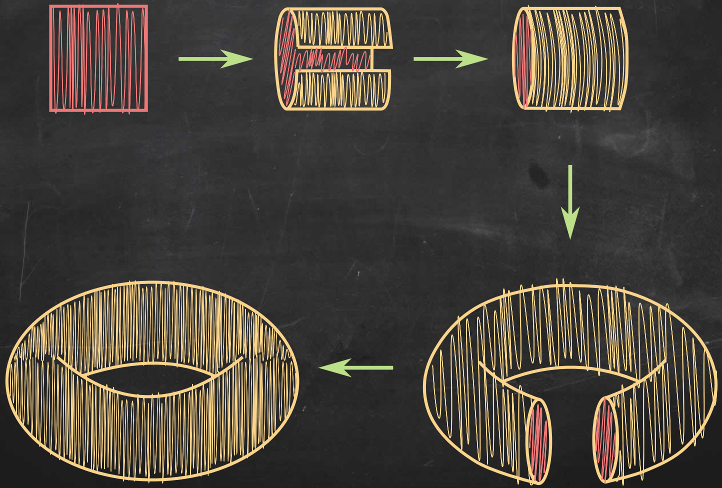


El toro



$=$

El toro



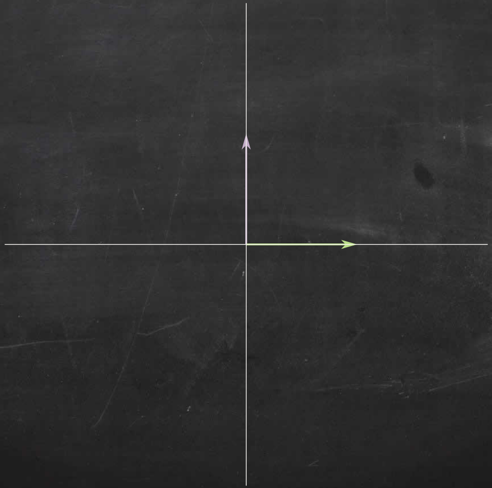
El toro

El toro

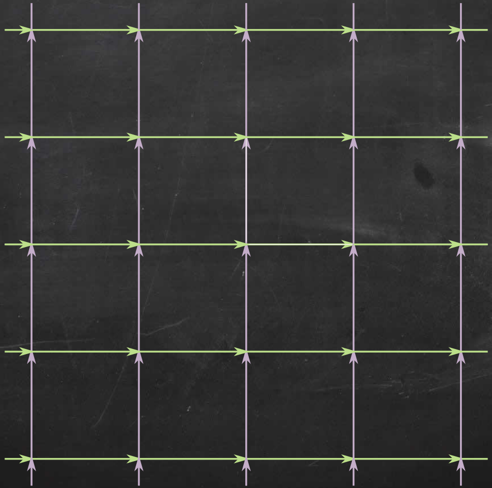
El toro

El toro

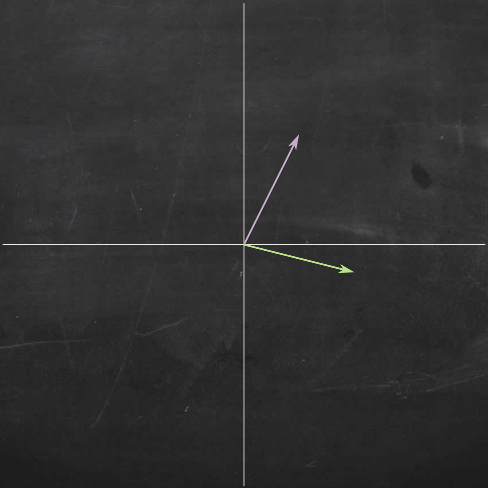
El toro



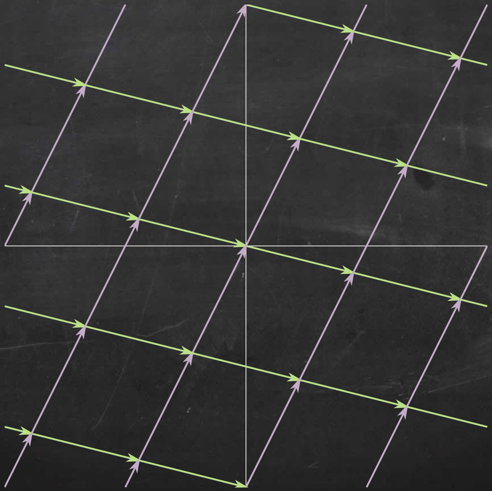
El toro



El toro



El toro



El toro

Observación

El toro 2-dimensional es el espacio que resulta al identificar los puntos de $\mathbb{E}^2$ mediante 2 traslaciones linealmente independientes.

El toro

Observación

El toro 2-dimensional es el espacio que resulta al identificar los puntos de $\mathbb{E}^2$ mediante 2 traslaciones linealmente independientes.

Definición

El toro n-dimensional es el espacio que resulta al identificar los puntos de $\mathbb{E}^n$ mediante n traslaciones linealmente independientes.

Toros cuadriculados
¿Dónde vamos?

* Ya hablamos de cuadrículas en $\mathbb{E}^n$.

Toros cuadriculados

¿Dónde vamos?

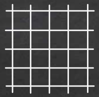
* Ya hablamos de cuadrículas en $\mathbb{E}^n$.
* Ya sabemos como obtener el n-toro pegando puntos de $\mathbb{E}^n$.

Toros cuadriculados
¿Dónde vamos?

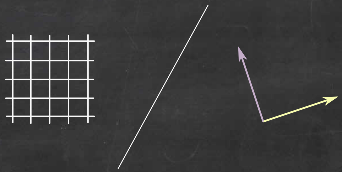
* Ya hablamos de cuadrículas en $\mathbb{E}^n$.
* Ya sabemos como obtener el n-toro pegando puntos de $\mathbb{E}^n$.

¡Juntar ambas cosas es facilísimo!

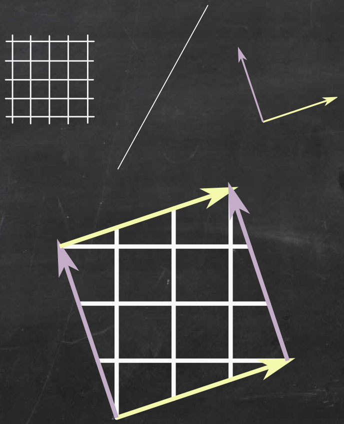
Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Toros cuadriculados

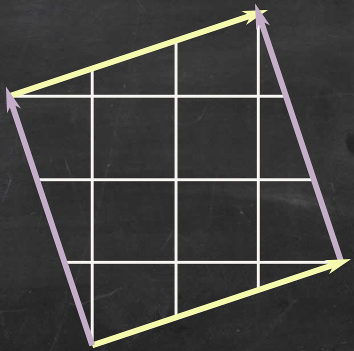
¿Qué pasa con las simetrías?

Toros cuadriculados

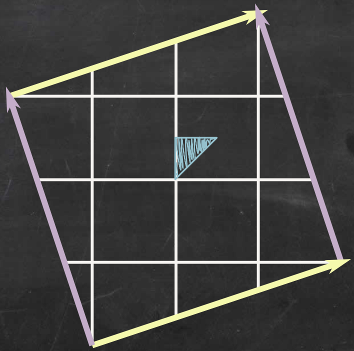
¿Qué pasa con las simetrías?

¿Será que todos los toros cuadriculados son regulares?

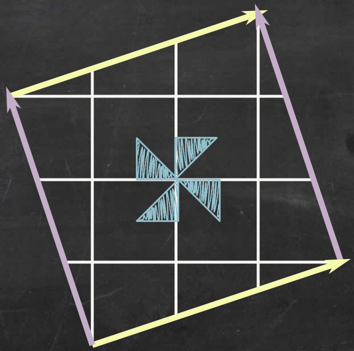
Toros cuadriculados



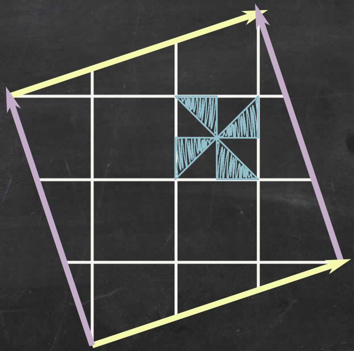
Toros cuadriculados



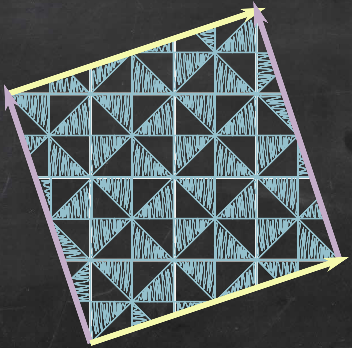
Toros cuadriculados



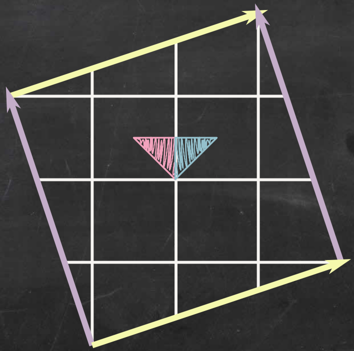
Toros cuadriculados



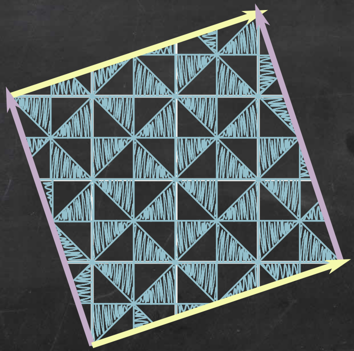
Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Toros cuadriculados

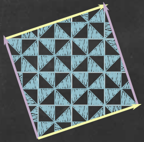


Toros cuadriculados

* Un toro cuadriculado como éste se llama quiral.

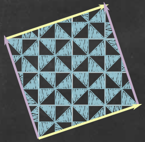
Toros cuadriculados

* Un toro cuadriculado como éste se llama quiral.



Toros cuadriculados

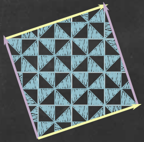
* Un toro cuadriculado como éste se llama quiral.



* Existen toros cuadriculados que no son regulares.

Toros cuadriculados

* Un toro cuadriculado como éste se llama quiral.



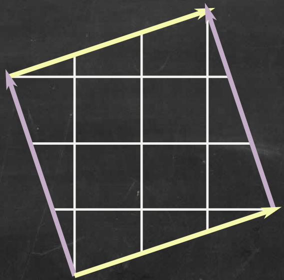
* Existen toros cuadriculados que no son regulares.
* Pregunta: ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados n-dimensionales de acuerdo a su tipo de simetría?

Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?

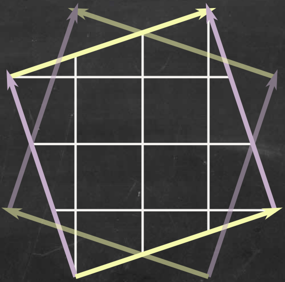
Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?



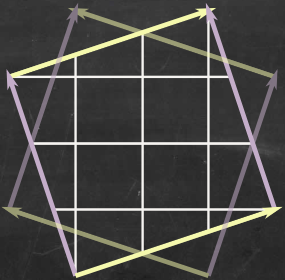
Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?



Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?



La simetría que queríamos no respeta el pegado.

Toros cuadriculados

* Entonces... determinar cuáles simetrías de $\mathcal{U}$ respetan el pegado determina el tipo de simetría del toro cuadriculado.

Toros cuadriculados

* Entonces... determinar cuáles simetrías de $\mathcal{U}$ respetan el pegado determina el tipo de simetría del toro cuadriculado.
* Nos deberíamos concentrar en los generadores de $\Gamma(\mathcal{U})$: traslaciones, permutaciones de coordenadas, cambios de signo.

Toros cuadriculados

- Entonces... determinar cuáles simetrías de $\mathcal{U}$ respetan el pegado determina el tipo de simetría del toro cuadriculado.
- Nos deberíamos concentrar en los generadores de $\Gamma(\mathcal{U})$: traslaciones, permutaciones de coordenadas, cambios de signo.
- Las traslaciones funcionan bien: si x y y se pegan, $x+u$ y $y+u$ se pegan.

Toros cuadriculados

- Entonces... determinar cuáles simetrías de $\mathcal{U}$ respetan el pegado determina el tipo de simetría del toro cuadriculado.
- Nos deberíamos concentrar en los generadores de $\Gamma(\mathcal{U})$: traslaciones, permutaciones de coordenadas, cambios de signo.
- Las traslaciones funcionan bien: si x y y se pegan, $x + u$ y $y + u$ se pegan.
- Analizar todas las demás es muchísimo, es un número parecido a $2^n n!$.

Toros cuadriculados

* $n = 2$

Toros cuadriculados

* $n = 2$
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80.

Toros cuadriculados

* $n = 2$
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80.
  - Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).

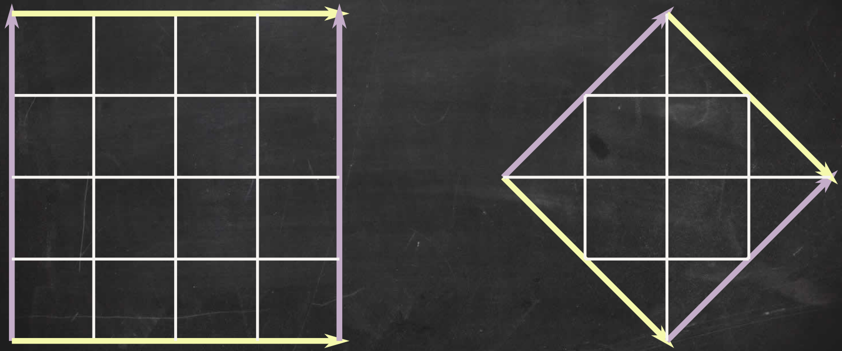
Toros cuadriculados

* $n = 2$
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80.
  - Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).
  - Brehem y Kühnel completaron la clasificación por primera vez (2008).

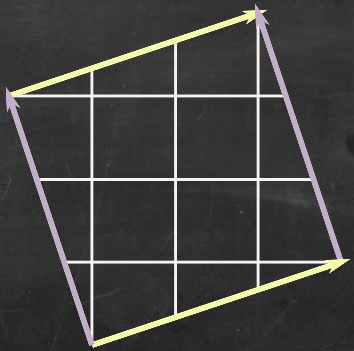
Toros cuadriculados

* $n = 2$
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80.
  - Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).
  - Brehem y Kühnel completaron la clasificación por primera vez (2008).
  - Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss obtienen de nuevo esta clasificación (2012).

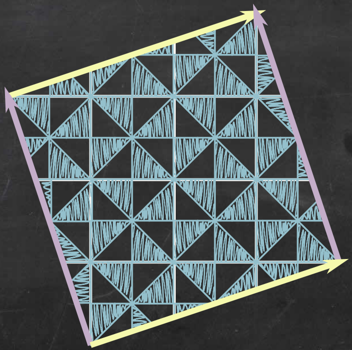
Toros cuadriculados



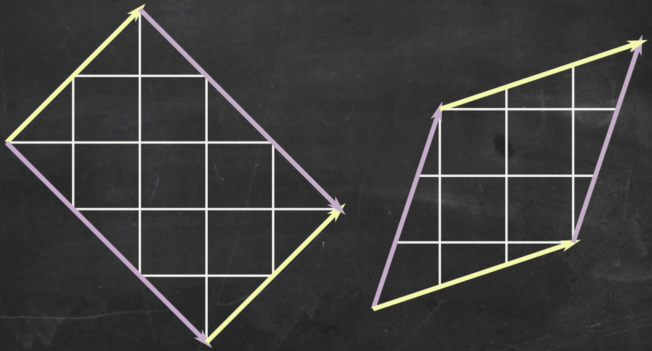
Toros cuadriculados



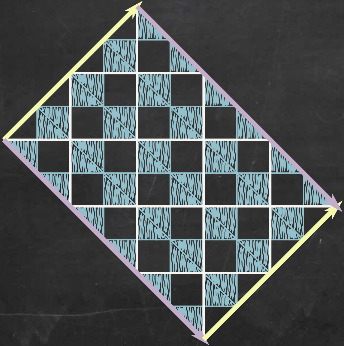
Toros cuadriculados

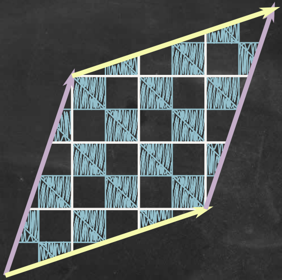


Toros cuadriculados

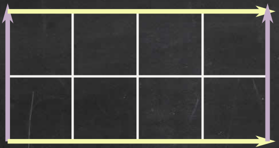


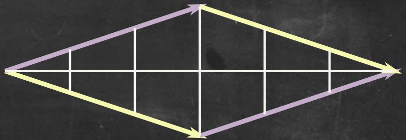
Toros cuadriculados



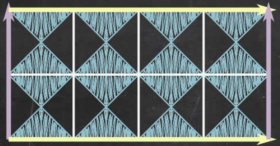


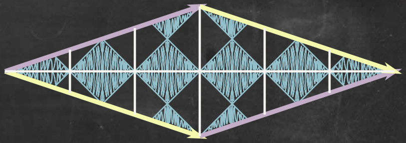
Toros cuadriculados





Toros cuadriculados





Toros cuadriculados

* $n = 3$

Toros cuadriculados

* $n = 3$
  - Clasificados por Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss (2012)

Toros cuadriculados

- $n = 3$
  - Clasificados por Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss (2012)
- $n \geqslant 4$
  - P. McMullen y E. Schulte clasificaron los regulares (1996).

Toros cuadriculados

- $n = 3$
  - Clasificados por Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss (2012)
- $n \geqslant 4$
  - P. McMullen y E. Schulte clasificaron los regulares (1996).
  - M. Hartley, P. McMullen y E. Schulte: no existen quirales si $n \geqslant 3$ (1999).

Toros cuadriculados

Corolario (H,O,P,W)

No existen toros cuadriculados tridimensionales con 2 órbitas.

Toros cuadriculados

Corolario (H,O,P,W)

No existen toros cuadriculados tridimensionales con 2 órbitas.

* Si $n \geqslant 4$ ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados n-dimensionales con 2 órbitas?

Toros cuadriculados

Corolario (H,O,P,W)

No existen toros cuadriculados tridimensionales con 2 órbitas.

* Si $n \geqslant 4$ ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados n-dimensionales con 2 órbitas?
* ¿Siquiera existen?

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Definición

Decimos que un toro cuadriculado n-dimensional tiene pocas órbitas si tiene a lo más n órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Definición

Decimos que un toro cuadriculado n-dimensional tiene pocas órbitas si tiene a lo más n órbitas.

- Los toros cuadriculados regulares y de 2-órbitas son siempre de pocas órbitas.

Toros cuadriculados...
...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Una familia de 2 órbitas.

Toros cuadriculados...
...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)
Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Una familia de 2 órbitas.
* Una familia de 3 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)
Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Una familia de 2 órbitas.
* Una familia de 3 órbitas.
* Tres familias de 4 órbitas.

Toros cuadriculados...
...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geqslant 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geqslant 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)
Si $n \geqslant 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geqslant 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.
* Si n es impar, no existen toros cuadriculados de 2 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geqslant 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.
* Si n es impar, no existen toros cuadriculados de 2 órbitas.
* Si $2 < k < n$, no existen toros cuadriculados de k órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)
Si $n \geqslant 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

* Tres familias de regulares.
* Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.
* Si n es impar, no existen toros cuadriculados de 2 órbitas.
* Si $2 < k < n$, no existen toros cuadriculados de k órbitas.
* Para toda n existen tres familias de toros cuadriculados con n órbitas.

El secreto

El secreto

Geometría	Grupos
Cuadricula $\mathcal{U}$ en $\mathbb{E}^n$	$\Gamma(\mathcal{U}) = \mathbb{Z}^n \rtimes (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$

El secreto

Geometría	Grupos
Cuadricula $\mathcal{U}$ en $\mathbb{E}^n$	$\Gamma(\mathcal{U}) = \mathbb{Z}^n \rtimes (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$
Tipo de simetría de toros cuadriculados	$[K] : K \leqslant \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$

El secreto

Geometría	Grupos
Cuadricula $\mathcal{U}$ en $\mathbb{E}^n$	$\Gamma(\mathcal{U}) = \mathbb{Z}^n \rtimes (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$
Tipo de simetría de toros cuadriculados	$[K] : K \leqslant \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$
Número de órbitas en banderas	$[\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n : K]$

¡Gracias!

Estas diapositivas estarán disponibles pronto en http://matmor.unam.mx/~amontero.

* Ningún animal o estudiante de posgrado fue lastimado para la elaboración de esta plática.

** Créditos a Enrique Rodríguez y Héctor Alonso, a quienes les robé las fotos.