Teselaciones simétricas del toro n-dimensional

Antonio Montero [1]
José Collins [2]

[1]Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Morelia

[2]Instituto de Matemáticas, UNAM C.U.

6^o Aquelarre Matemático

Facultad de Ciencias, UNAM C.U. México DF
Octubre 2014

¿Qué es una teselación?

Definicion

Una teselación $\mathcal{T}$ del espacio euclidiano $\mathbb{E}^n$ es una familia de n-politopos convexos tales que

- La unión de todos los politopos cubre a $\mathbb{E}^n$.

¿Qué es una teselación?

Definicion

Una teselación $\mathcal{T}$ del espacio euclidiano $\mathbb{E}^n$ es una familia de n-politopos convexos tales que

- La unión de todos los politopos cubre a $\mathbb{E}^n$.
- Si dos politopos se intersectan, entonces su intersección es una cara.

¿Qué es una teselación?

Definicion

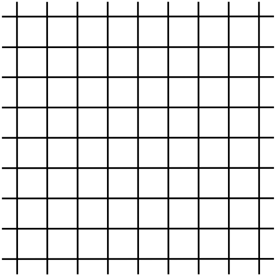
Una teselación $\mathcal{T}$ del espacio euclidiano $\mathbb{E}^n$ es una familia de n-politopos convexos tales que

- La unión de todos los politopos cubre a $\mathbb{E}^n$.
- Si dos politopos se intersectan, entonces su intersección es una cara.

La verdad... esto es muy general.

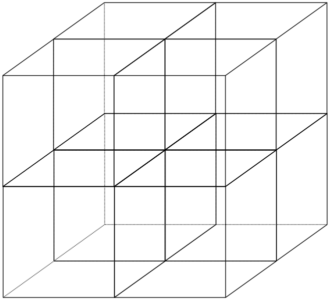
Teselaciones

A nosotros nos interesa una teselación muy particular de $\mathbb{E}^n$... la teselación con n-cubos:



Teselaciones

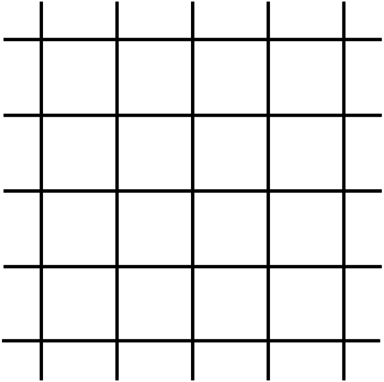
A nosotros nos interesa una teselación muy particular de $\mathbb{E}^n$... la teselación con n-cubos:



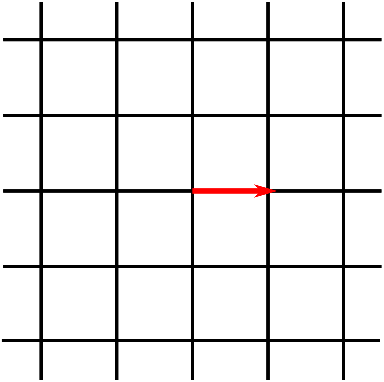
Simetrías de teselaciones

Una simetría de una teselación es una isometría del espacio que preserva la teselación.

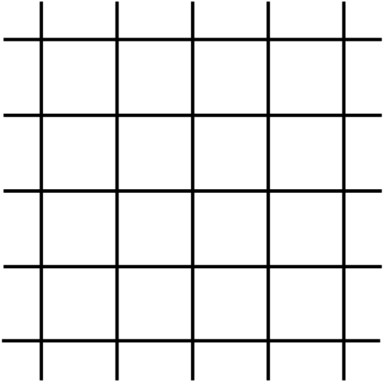
Simetrías de teselaciones



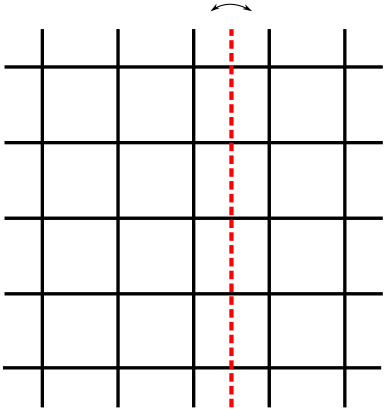
Simetrías de teselaciones



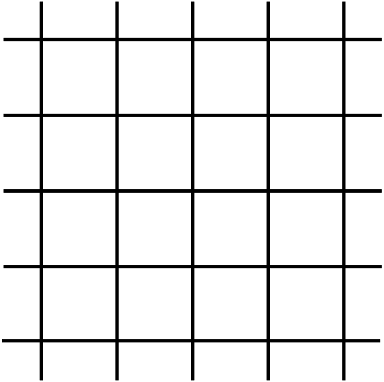
Simetrías de teselaciones



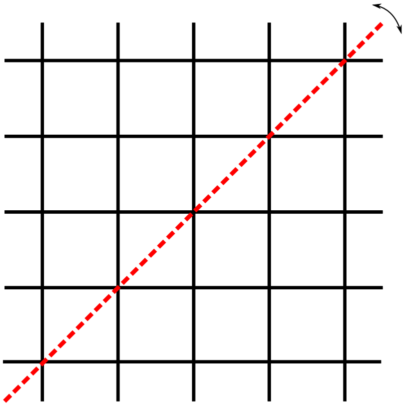
Simetrías de teselaciones



Simetrías de teselaciones



Simetrías de teselaciones



Simetrías de teselaciones

Banderas

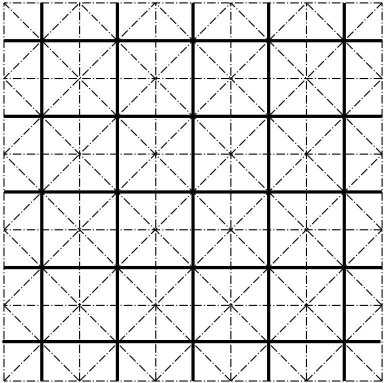
Una bandera de una teselación de $\mathbb{E}^n$ es una $(n+1)$-ada de caras incidentes $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ donde $dim(F_i) = i$.

Una bandera de una teselación de $\mathbb{E}^n$ es una $(n+1)$-ada de caras incidentes $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ donde $dim(F_i) = i$.

Una teselación $\mathcal{T}$ es regular si dadas dos banderas Φ y Ψ, existe una simetría de $\mathcal{T}$ que manda Φ en Ψ.

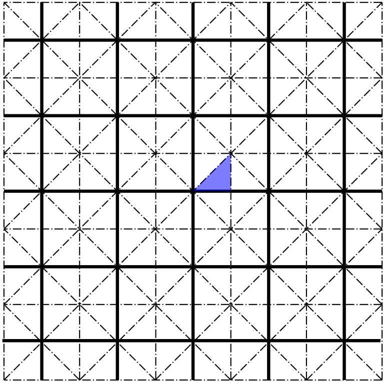
Simetrías de teselaciones

Banderas



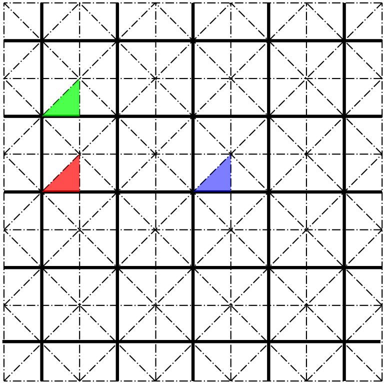
Simetrías de teselaciones

Banderas



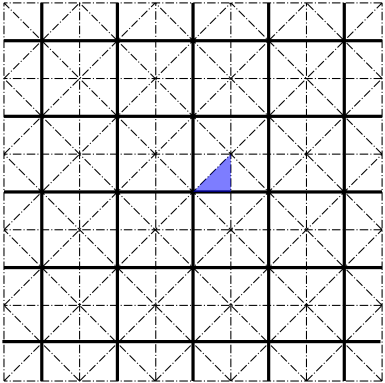
Simetrías de teselaciones

Banderas



Simetrías de teselaciones

Banderas

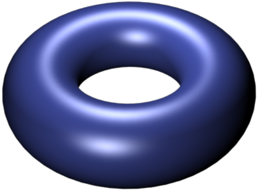


Teselaciones Regulares

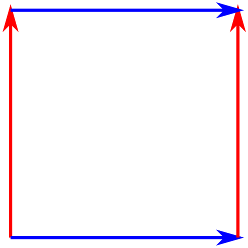
Teorema

La teselación con n-cubos de $\mathbb{E}^n$ es regular. Más aún, si $n \notin \{2, 4\}$, entonces es la única teselación regular en $\mathbb{E}^n$.

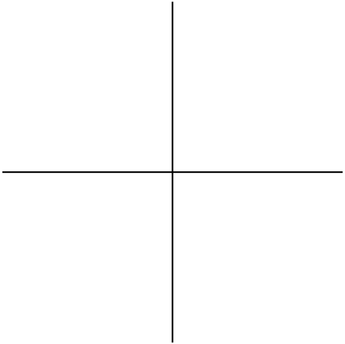
El toro...



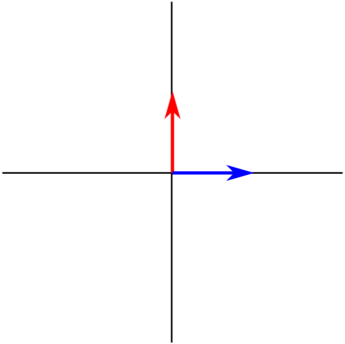
El toro...



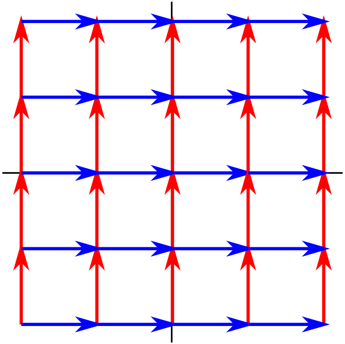
El toro...



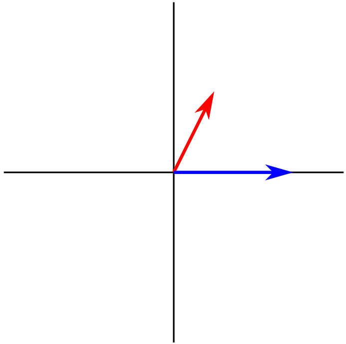
El toro...



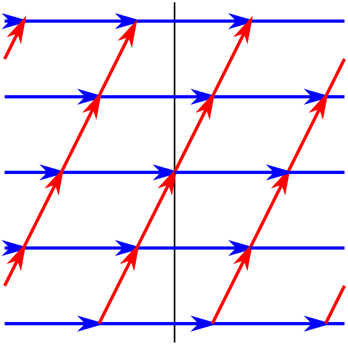
El toro...



El toro...



El toro...

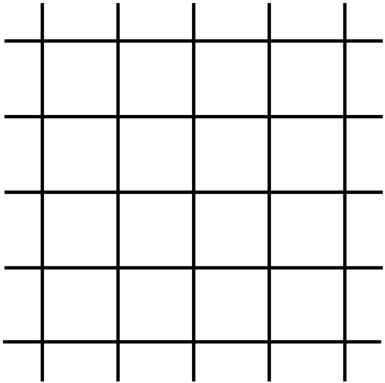


El n-toro

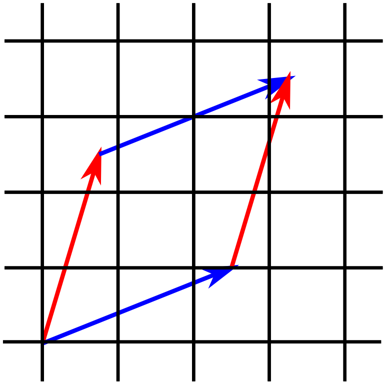
Definicion

El n-toro es el espacio que resulta de identificar los puntos de $\mathbb{E}^n$ mediante n traslaciones linealmente independientes.

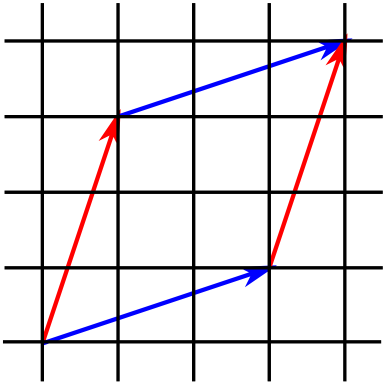
Teselaciones del n-toro



Teselaciones del n-toro



Teselaciones del n-toro

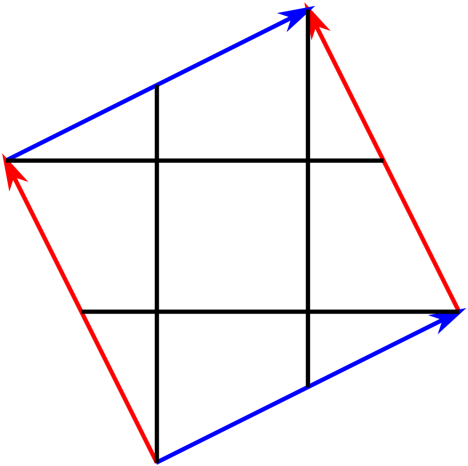


¿Qué pasa con las simetrías?

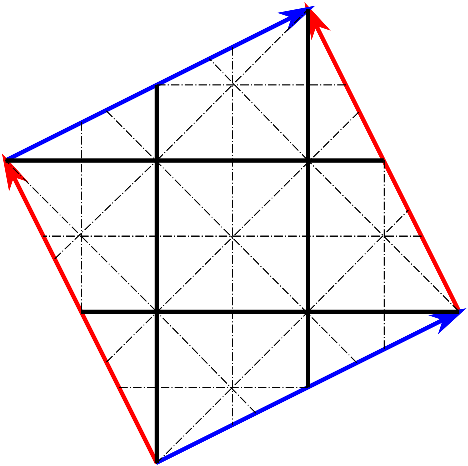
¿Qué pasa con las simetrías?

¿Las teselaciones del n-toro con n-cubos son todas regulares?

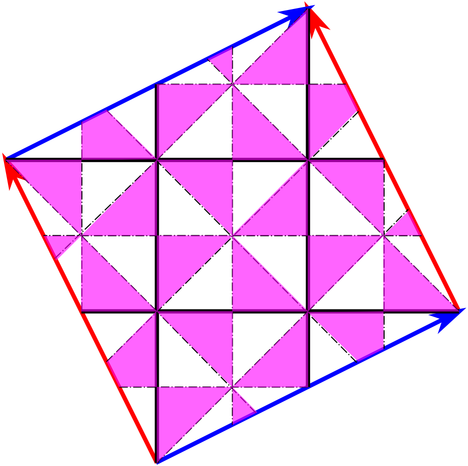
Teselaciones del n-toro



Teselaciones del n-toro



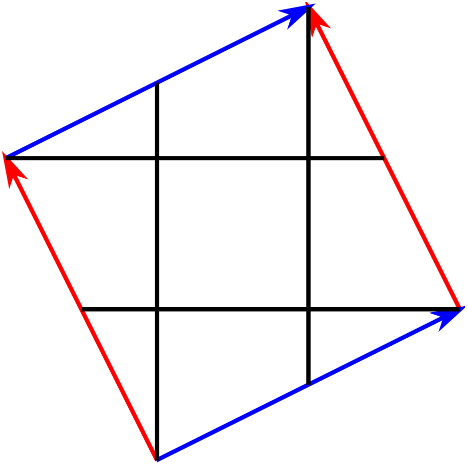
Teselaciones del n-toro



Teselaciones del n-toro

Simetrías del n-toro

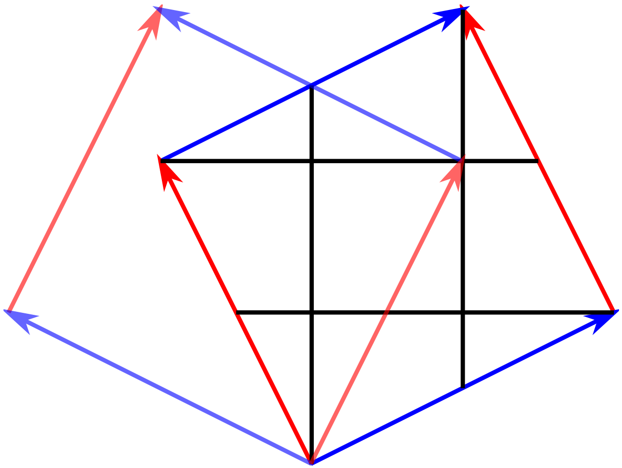
De fondo, el problema es que no todas las simetrías de $\mathcal{T}$ “se portan bien” con la identificación de las traslaciones.



Teselaciones del n-toro

Simetrías del n-toro

De fondo, el problema es que no todas las simetrías de $\mathcal{T}$ “se portan bien” con la identificación de las traslaciones.



¿Cuáles simetrías si se portan bien con las traslaciones?

Teselaciones del n-toro

Simetrías del n-toro

¿Cuáles simetrías si se portan bien con las traslaciones?

En principio... quién sabe...

¿Cuáles simetrías si se portan bien con las traslaciones?
En principio... quién sabe... pero sí conocemos algunas que siempre se comportan:

- $-id$.

¿Cuáles simetrías si se portan bien con las traslaciones?
En principio... quién sabe... pero sí conocemos algunas que siempre se comportan:

- $-id$.
- Las traslaciones.

¿Cuáles simetrías si se portan bien con las traslaciones?
En principio... quién sabe... pero sí conocemos algunas que siempre se comportan:

- $-id$.
- Las traslaciones.

Gracias a esto, conocer las simetrías de las teselaciones del n-toro es equivalente conocer las simetrias de $\mathcal{T}$ que fijan un vértice.

Teselaciones simétricas del n-toro

- Mediante esta técnica es posible, al menos teóricamente, dar una clasificación de las teselaciones del n-toro.

Teselaciones simétricas del n-toro

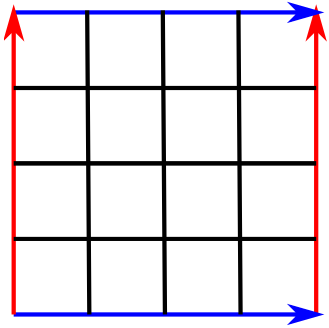
- Mediante esta técnica es posible, al menos teóricamente, dar una clasificación de las teselaciones del n-toro.
- Lamentablemente, es poco práctico, pues hay que analizar algo del orden de $2^n n!$ casos.

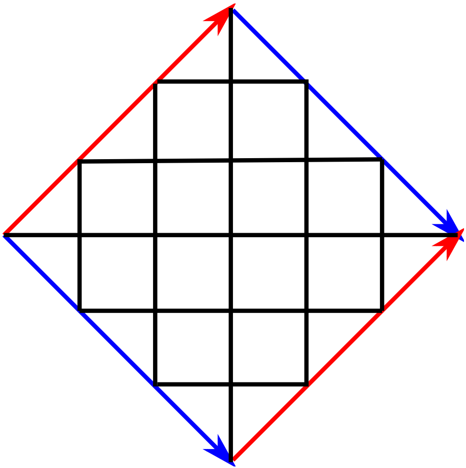
Teselaciones simétricas del n-toro

- Mediante esta técnica es posible, al menos teóricamente, dar una clasificación de las teselaciones del n-toro.
- Lamentablemente, es poco práctico, pues hay que analizar algo del orden de $2^n n!$ casos.
- Para $n = 2$ y $n = 3$ sí podemos dar la clasificación.

Teselaciones simétricas del 2-toro

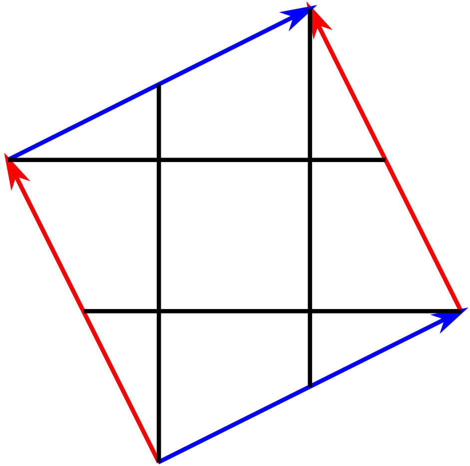
Regulares





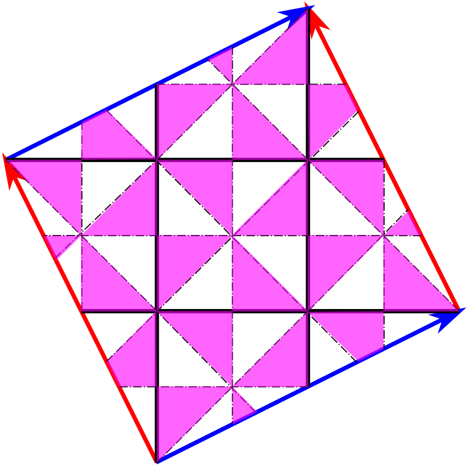
Teselaciones simétricas del 2-toro

Quirales o clase $2_\emptyset$



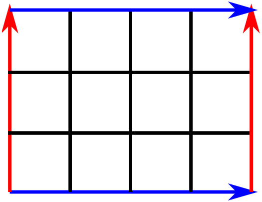
Teselaciones simétricas del 2-toro

Quirales o clase $2_\emptyset$



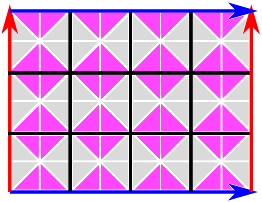
Teselaciones simétricas del 2-toro

Clase $2_{\{0,2\}}$



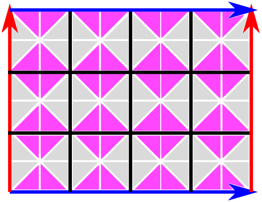
Teselaciones simétricas del 2-toro

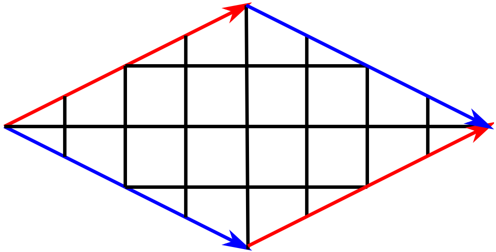
Clase $2_{\{0,2\}}$



Teselaciones simétricas del 2-toro

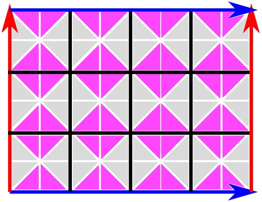
Clase $2_{\{0,2\}}$

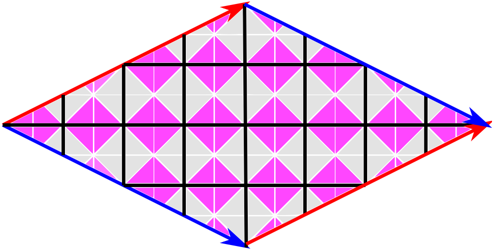




Teselaciones simétricas del 2-toro

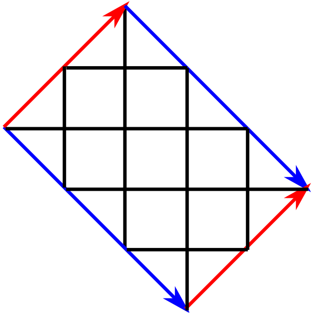
Clase $2_{\{0,2\}}$





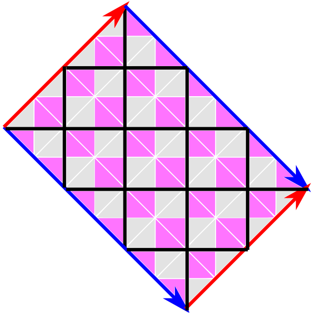
Teselaciones simétricas del 2-toro

Clase $2_{\{1\}}$



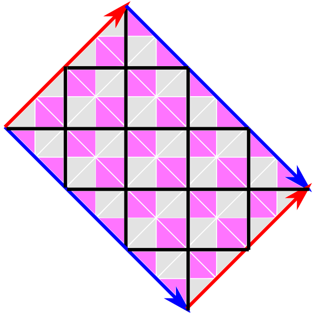
Teselaciones simétricas del 2-toro

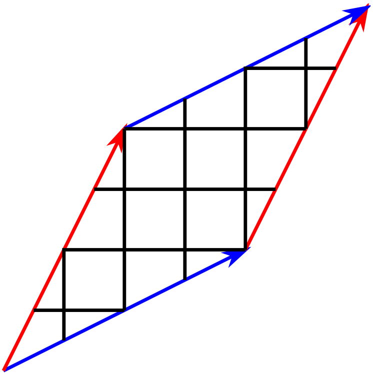
Clase $2_{\{1\}}$



Teselaciones simétricas del 2-toro

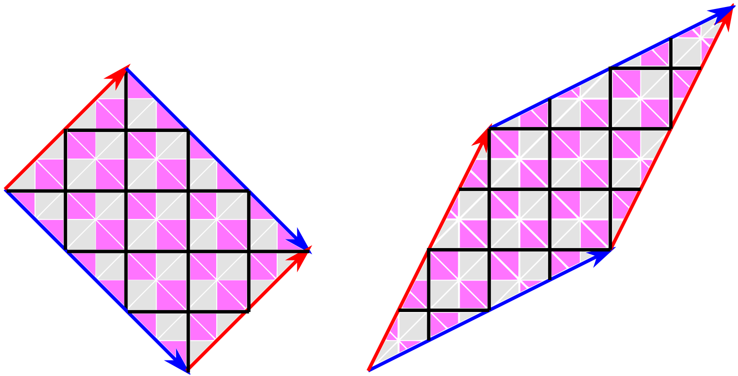
Clase $2_{\{1\}}$





Teselaciones simétricas del 2-toro

Clase $2_{\{1\}}$



Teselaciones simétricas del 2-toro

- Además de los regulares y las familias de 2 órbitas en banderas presentadas hay una familia de 4 órbitas en banderas.

Teselaciones simétricas del 2-toro

- Además de los regulares y las familias de 2 órbitas en banderas presentadas hay una familia de 4 órbitas en banderas.
- La clasificación de estas teselaciones es trabajo de diversos autores :
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80's.

Teselaciones simétricas del 2-toro

- Además de los regulares y las familias de 2 órbitas en banderas presentadas hay una familia de 4 órbitas en banderas.
- La clasificación de estas teselaciones es trabajo de diversos autores :
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80's.
  - Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).

Teselaciones simétricas del 2-toro

- Además de los regulares y las familias de 2 órbitas en banderas presentadas hay una familia de 4 órbitas en banderas.
- La clasificación de estas teselaciones es trabajo de diversos autores :
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80's.
  - Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).
  - Brehem y Kühnel completaron la clasificación (2008).

Teselaciones simétricas del 2-toro

- Además de los regulares y las familias de 2 órbitas en banderas presentadas hay una familia de 4 órbitas en banderas.
- La clasificación de estas teselaciones es trabajo de diversos autores :
  - Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 80's.
  - Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).
  - Brehem y Kühnel completaron la clasificación (2008).
  - Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss introducen la técnica antes mencionada y obtienen esta clasificación (2012).

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.
- Cuatro familias con 3 órbitas.

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.
- Cuatro familias con 3 órbitas.
- Tres familias con 4 órbitas.

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.
- Cuatro familias con 3 órbitas.
- Tres familias con 4 órbitas.
- Dieciseis familias con 6 órbitas con tres arreglos de banderas distintos (siete, siete y dos).

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.
- Cuatro familias con 3 órbitas.
- Tres familias con 4 órbitas.
- Dieciseis familias con 6 órbitas con tres arreglos de banderas distintos (siete, siete y dos).
- Tres familias con 8 órbitas.

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.
- Cuatro familias con 3 órbitas.
- Tres familias con 4 órbitas.
- Dieciseis familias con 6 órbitas con tres arreglos de banderas distintos (siete, siete y dos).
- Tres familias con 8 órbitas.
- Doce familias con 12 órbitas, dos arreglos de órbitas distintos (siete y cinco).

Teselaciones regulares del 3-toro

Hubard, Orbanić, Pellicer y Weiss usan esta técnica para clasificar las teselaciones cubicas del 3-toro. Los resultados son:

- Tres familias de regulares.
- Cuatro familias con 3 órbitas.
- Tres familias con 4 órbitas.
- Dieciseis familias con 6 órbitas con tres arreglos de banderas distintos (siete, siete y dos).
- Tres familias con 8 órbitas.
- Doce familias con 12 órbitas, dos arreglos de órbitas distintos (siete y cinco).
- Una familia con 24 órbitas que contiene al resto de las teselaciones.

Teselaciones simétricas del 3-toro

- No existen teselaciones de 2 órbitas en el 3-toro.

Teselaciones simétricas del 3-toro

- No existen teselaciones de 2 órbitas en el 3-toro.
- H., O., P. y W. dejan abierta la pregunta acerca de la clasificación de teselaciones del n-toro con 2 órbitas para $n \geqslant 4$.

Teselaciones simétricas del 3-toro

- No existen teselaciones de 2 órbitas en el 3-toro.
- H., O., P. y W. dejan abierta la pregunta acerca de la clasificación de teselaciones del n-toro con 2 órbitas para $n \geqslant 4$.
- Evidencia teórica de que estos podrían no existir:
  - Se sabe que no existen quirales para $n \geqslant 3$.
  - Existe una k tal que no existen poliedros convexos de 2 órbitas si $n > k$.

Teselaciones simétricas del n-toro.

Sin embargo, J. Collins y M. hemos encontrado algunos resultados para $n \geqslant 4$:

Teselaciones simétricas del n-toro.

Sin embargo, J. Collins y M. hemos encontrado algunos resultados para $n \geqslant 4$:

- Si n es impar, no existen teselaciones del n-toro con 2 órbitas en banderas.

Teselaciones simétricas del n-toro.

Sin embargo, J. Collins y M. hemos encontrado algunos resultados para $n \geqslant 4$:

- Si n es impar, no existen teselaciones del n-toro con 2 órbitas en banderas.
- Si n es par, existen dos familias de teselaciones en clase $2_{\{1,2,\ldots,n-1\}}$ y éstas son todas las de dos órbitas.

Teselaciones simétricas del n-toro.

Sin embargo, J. Collins y M. hemos encontrado algunos resultados para $n \geqslant 4$:

- Si n es impar, no existen teselaciones del n-toro con 2 órbitas en banderas.
- Si n es par, existen dos familias de teselaciones en clase $2_{\{1,2,\ldots,n-1\}}$ y éstas son todas las de dos órbitas.
- Si $2 < k < n$, entonces no existen teselaciones con cubos del n-toro con k órbitas.

Teselaciones simétricas del n-toro.

Sin embargo, J. Collins y M. hemos encontrado algunos resultados para $n \geqslant 4$:

- Si n es impar, no existen teselaciones del n-toro con 2 órbitas en banderas.
- Si n es par, existen dos familias de teselaciones en clase $2_{\{1,2,\ldots,n-1\}}$ y éstas son todas las de dos órbitas.
- Si $2 < k < n$, entonces no existen teselaciones con cubos del n-toro con k órbitas.
- Para toda $n \geqslant 4$ existen teselaciones del n-toro con n órbitas.

Trabajo a futuro

¿Será cierto que si M es una n-variedad plana que admite una teselación con cubos con k órbitas, para alguna $k \leqslant n$ entonces M es forzosamente es el n-toro?

¡Gracias!