Simetrías: un paseo por la geometría, los mosaicos y los grupos

Antonio Montero
amontero@matmor.unam.mx

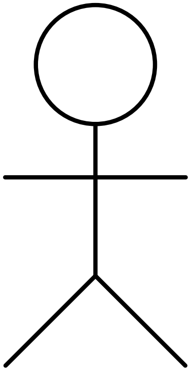
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Degustaciones Matemáticas

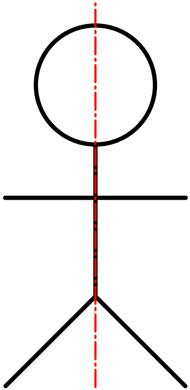
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas UMSNH
Febrero 2015

¿Qué es una simetría?

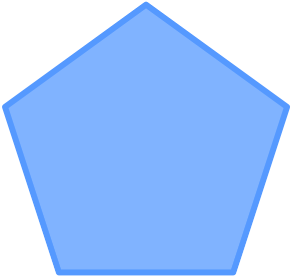
¿Qué es una simetría?



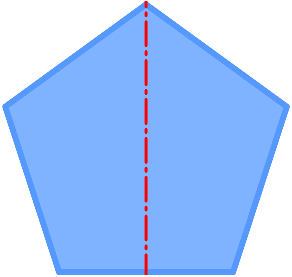
¿Qué es una simetría?



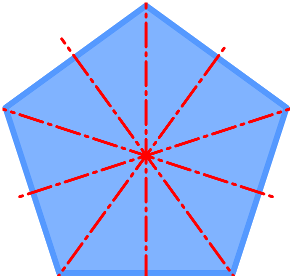
¿Qué es una simetría?



¿Qué es una simetría?

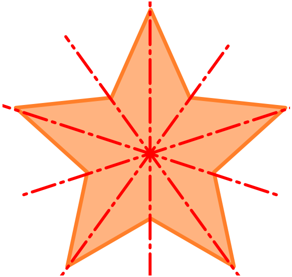


¿Qué es una simetría?

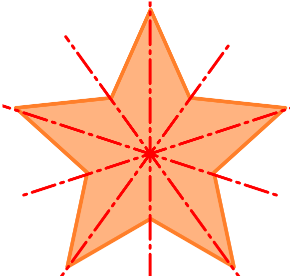


¿Qué es una simetría?

¿Qué es una simetría?



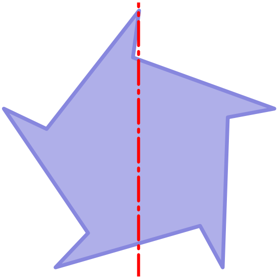
¿Qué es una simetría?



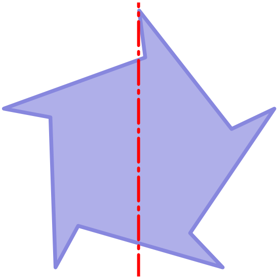
¿Simetría $\Longrightarrow$ Reflexión?

¿Qué es una simetría?

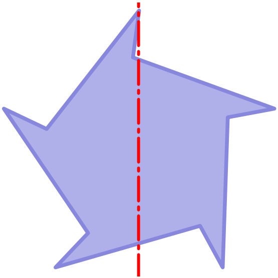
¿Qué es una simetría?



¿Qué es una simetría?



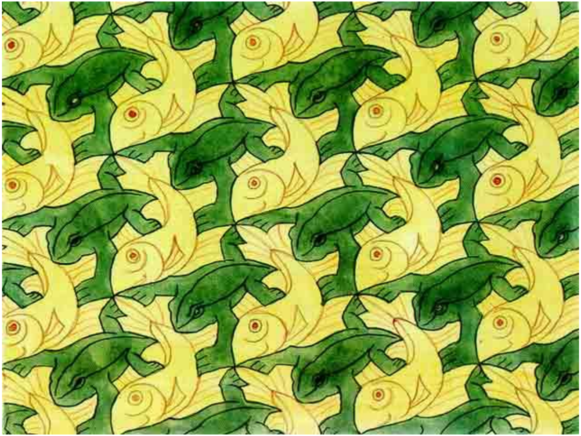
¿Qué es una simetría?



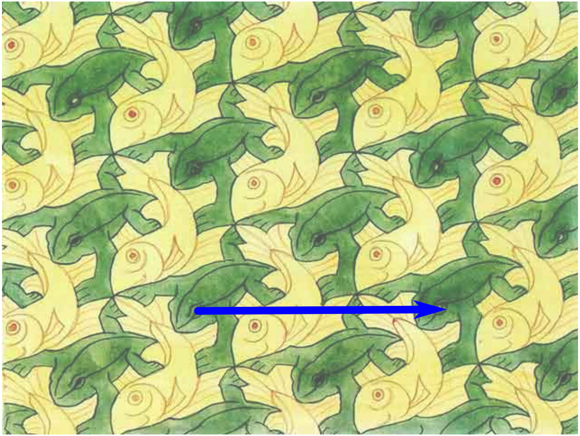
¿Qué es una simetría?

¿Qué es una simetría?

¿Qué es una simetría?



¿Qué es una simetría?



¿Qué es una simetría?

Definición

Una simetría de un objeto geométrico plano es una isometría del plano que preserva al objeto.

¿Qué es una simetría?

Definición

Una simetría de un objeto geométrico plano es una isometría del plano que preserva al objeto.

1. La función identidad id es una simetría.

¿Qué es una simetría?

Definición

Una simetría de un objeto geométrico plano es una isometría del plano que preserva al objeto.

1. La función identidad id es una simetría.
2. Si S y T son simetrías, entonces $T \circ S$ es una simetría.

¿Qué es una simetría?

Definición

Una simetría de un objeto geométrico plano es una isometría del plano que preserva al objeto.

1. La función identidad id es una simetría.
2. Si S y T son simetrías, entonces $T \circ S$ es una simetría.
3. Si S es simetría, S^{-1} es simetría.

¿Qué es una simetría?

Definición

Una simetría de un objeto geométrico plano es una isometría del plano que preserva al objeto.

1. La función identidad id es una simetría.
2. Si S y T son simetrías, entonces $T \circ S$ es una simetría.
3. Si S es simetría, S^{-1} es simetría.

Una estructura matemática con este comportamiento recibe el nombre de grupo.

¿Qué es una simetría?

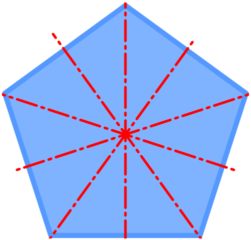
Definición

Una simetría de un objeto geométrico plano es una isometría del plano que preserva al objeto.

1. La función identidad id es una simetría.
2. Si S y T son simetrías, entonces $T \circ S$ es una simetría.
3. Si S es simetría, S^{-1} es simetría.

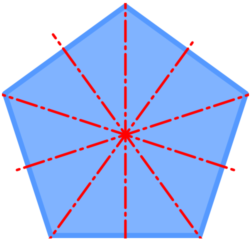
Una estructura matemática con este comportamiento recibe el nombre de grupo. Tiene sentido hablar del grupo de simetrías de un objeto.

Grupos de simetrías



(a) D_5

Grupos de simetrías



(a) D_5

(b) C_5

¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones

¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones

¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones

¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos

¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos

¿Qué isometrías tenemos?

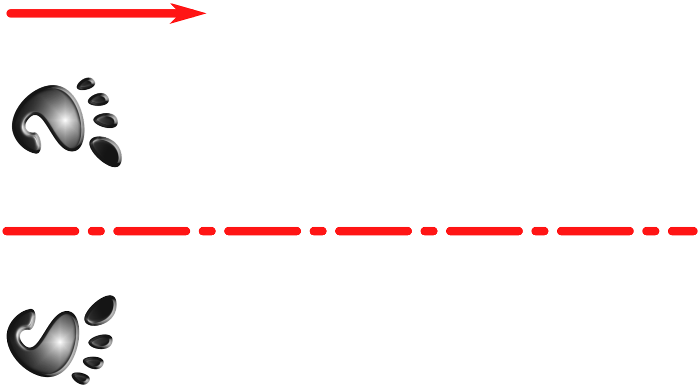
- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos

¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos

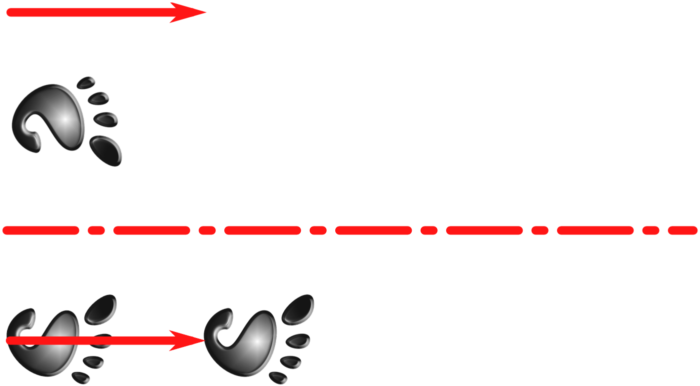
¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



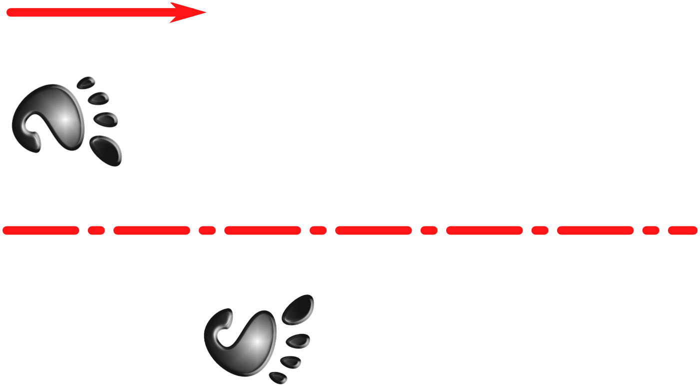
¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



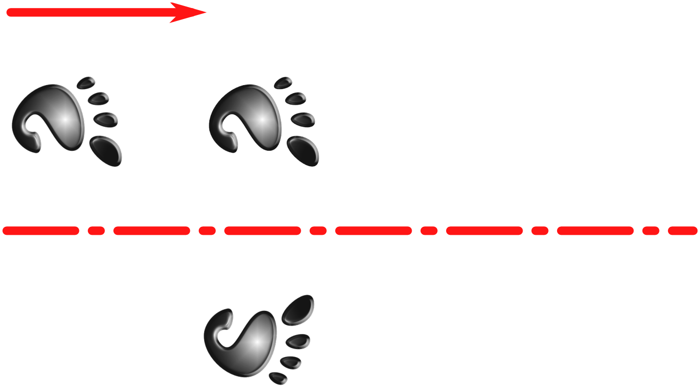
¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



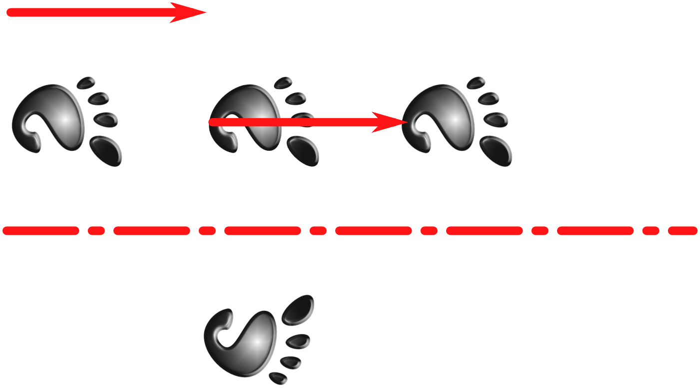
¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



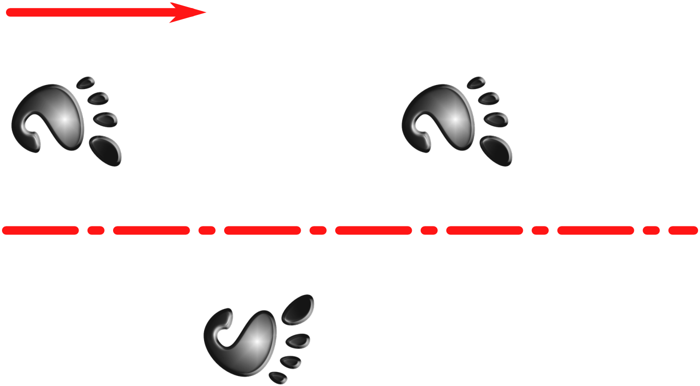
¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



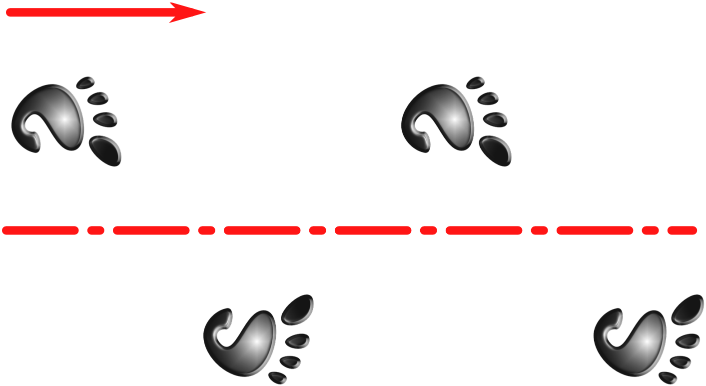
¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



¿Qué isometrías tenemos?

- Reflexiones
- Rotaciones
- Traslaciones
- Pasos



¿Qué isometrías tenemos?

Teorema

Si S es una isometría del plano entonces S es una de las siguientes:

- *Reflexión* ($*N$, $N = 1, 2, 3, \dots$)
- *Rotación* ($\bullet N$, $N = 2, 3, \dots$)
- *Traslación* ($\circ$)
- *Pasos* ($\times$)

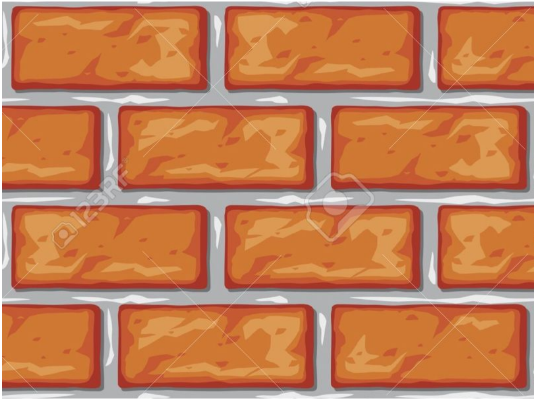
Bueno... y qué onda con los mosaicos?

¿Cómo encontrar el grupo de simetrías de un mosaico?

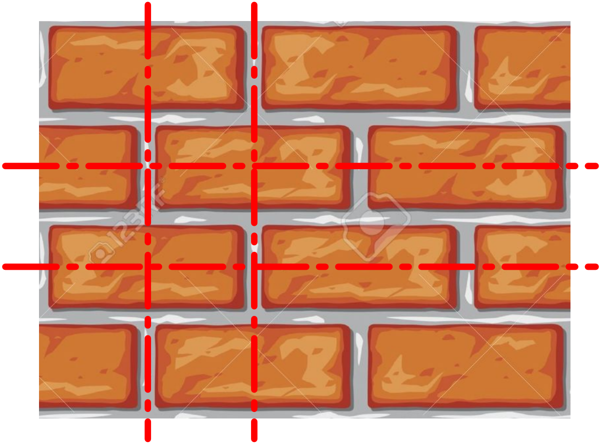
¿Cómo encontrar el grupo de simetrías de un mosaico?

1. Encuentre todos los puntos de tipo $*N$ y las lineas espejo $(*)$ que no sean equivalentes.
2. Marque todos los puntos no equivalentes de tipo $\bullet N$.
3. ¿Hay pasos? Una forma de detectarlos es si se puede ir de un punto a una copia de él sin pasar por un espejo.
4. Si no hay nada de lo anterior, solo queda buscar traslaciones (todos los mosaicos decentes tienen traslaciones).

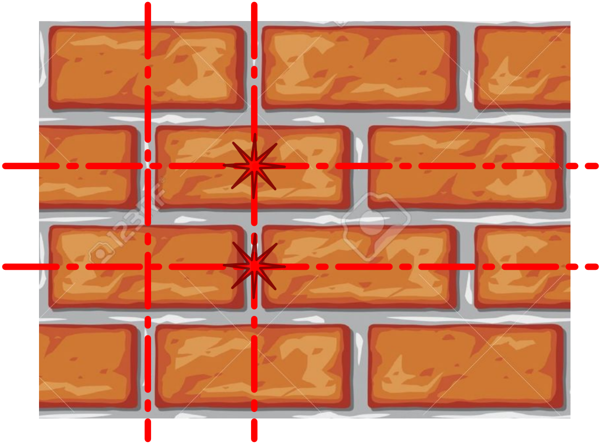
Otro mosaico familiar...



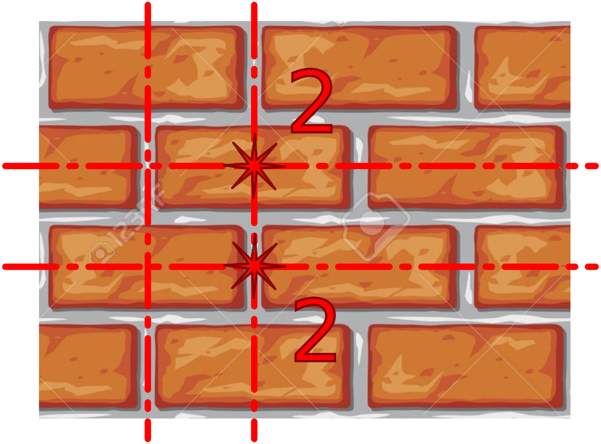
Otro mosaico familiar...



Otro mosaico familiar...



Otro mosaico familiar...



Otro mosaico familiar...

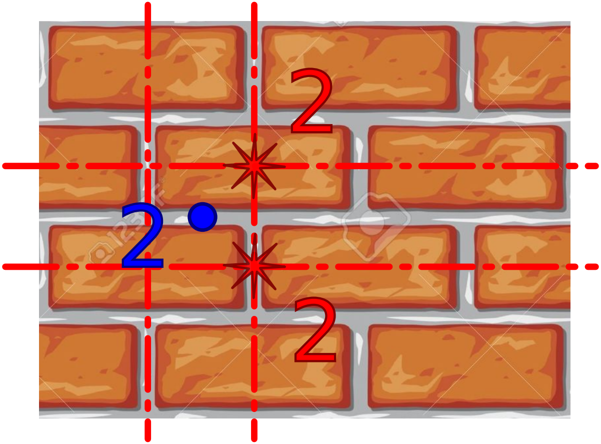
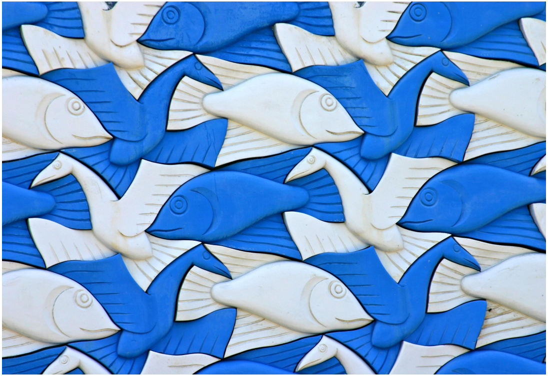


Figura : $2{*}22$

Uno de Escher...



Uno de Escher...

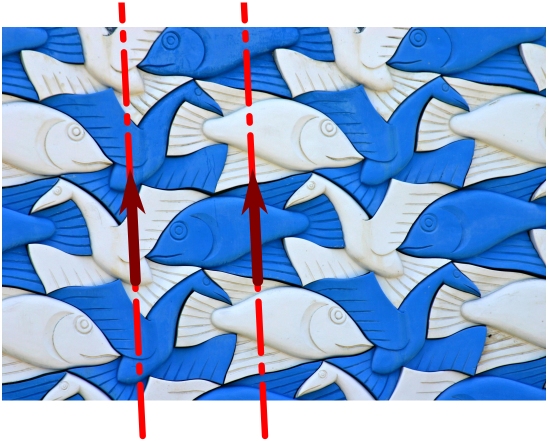
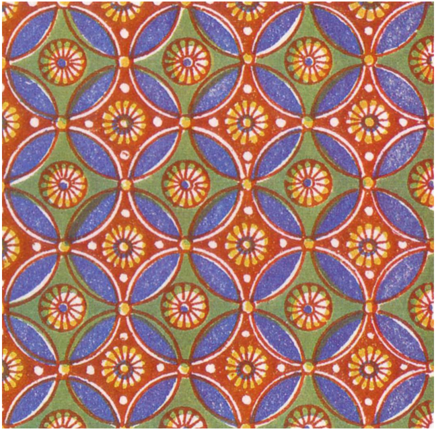


Figura : ×××

Un tapiz del pasado...



Un tapiz del pasado...

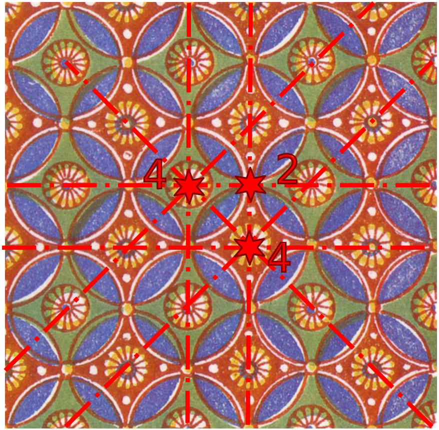
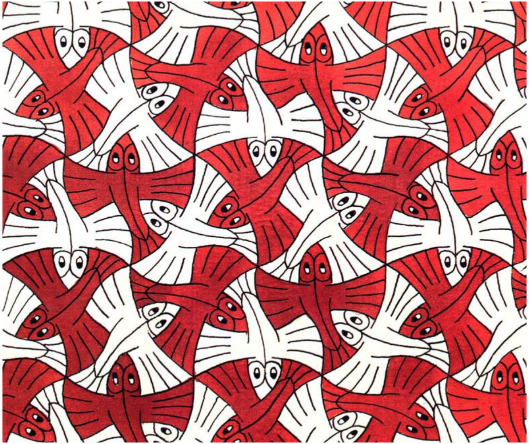
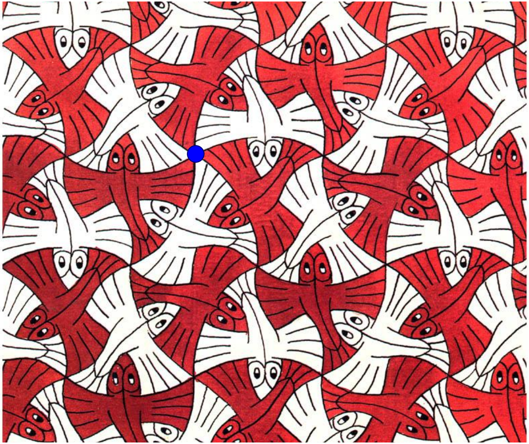


Figura : $*442$

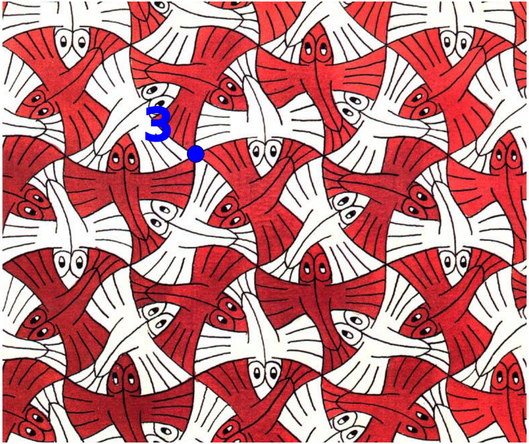
Azul como el agua...



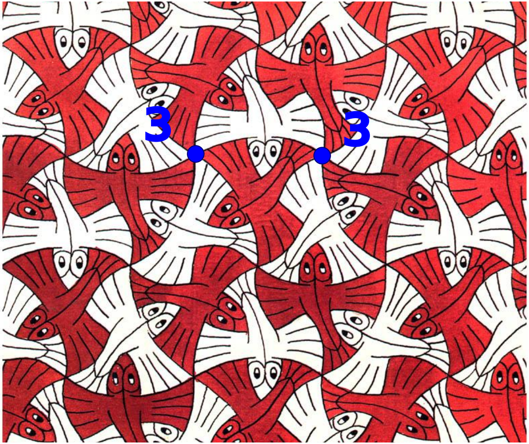
Azul como el agua...



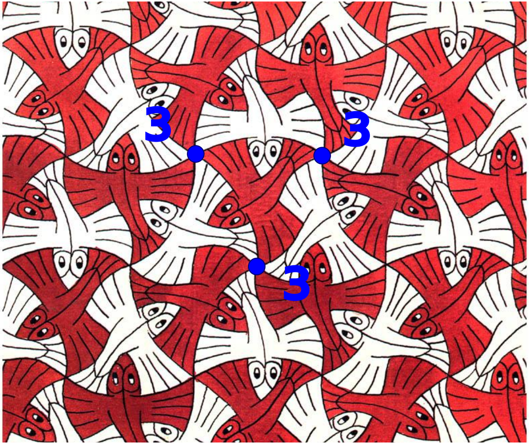
Azul como el agua...



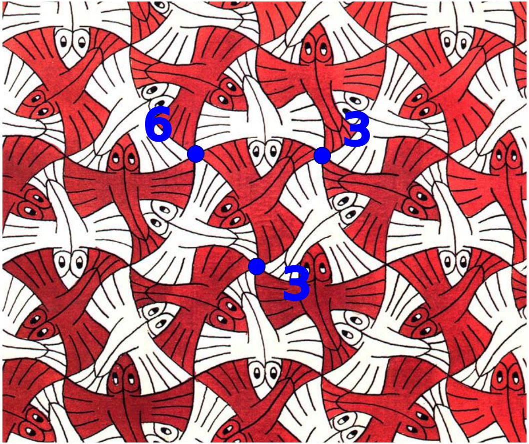
Azul como el agua...



Azul como el agua...



Azul como el agua...



Azul como el agua...

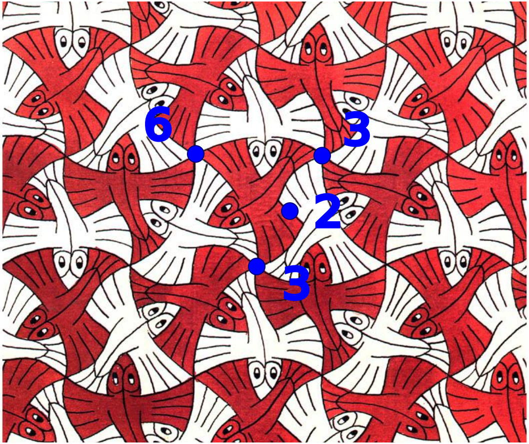


Figura : $333 \leqslant 632$

El teorema mágico...

Teorema

Existen 17 *grupos de simetrías de mosaicos decentes.*

Comentarios finales

- El nombre científico de los grupos de mosaicos es grupos cristalográficos.

Comentarios finales

- El nombre científico de los grupos de mosaicos es grupos cristalográficos.
- Se llaman así pues juegan un papel importante en la formación de cristales.

Comentarios finales

- El nombre científico de los grupos de mosaicos es grupos cristalográficos.
- Se llaman así pues juegan un papel importante en la formación de cristales.
- Estos grupos aparecen en la naturaleza.

Comentarios finales

- El nombre científico de los grupos de mosaicos es grupos cristalográficos.
- Se llaman así pues juegan un papel importante en la formación de cristales.
- Estos grupos aparecen en la naturaleza.
- A cada uno de los grupos se les puede asociar un espacio topológico compacto: el obrifold.

Comentarios finales

- El nombre científico de los grupos de mosaicos es grupos cristalográficos.
- Se llaman así pues juegan un papel importante en la formación de cristales.
- Estos grupos aparecen en la naturaleza.
- A cada uno de los grupos se les puede asociar un espacio topológico compacto: el obrifold.
- Si el grupo actúa libremente (sin puntos fijos) el orbifold es una superficie con geometría euclidiana.

¡Gracias!

"Los grupos, como las personas, se conocen por sus acciones"

¡Gracias!

"Los grupos, como las personas, se conocen por sus acciones" - Hiroki, 2013

¡Gracias!

"Los grupos, como las personas, se conocen por sus acciones" -
Hiroki, 2013