Poliedros Regulares en el 3-Toro.

Antonio Montero   Daniel Pellicer

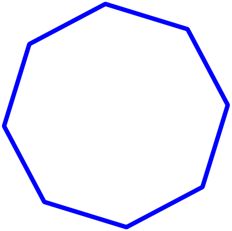
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

XLVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana

Mérida, Yucatán
Octubre-Noviembre 2013

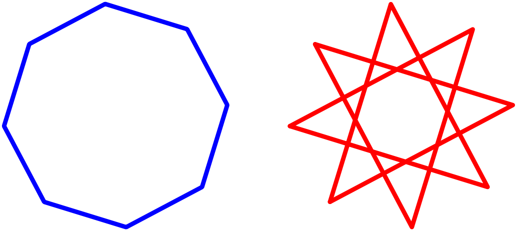
Polígonos

Un polígono es una gráfica conexa y 2-regular realizada en $\mathbb{E}^3$.



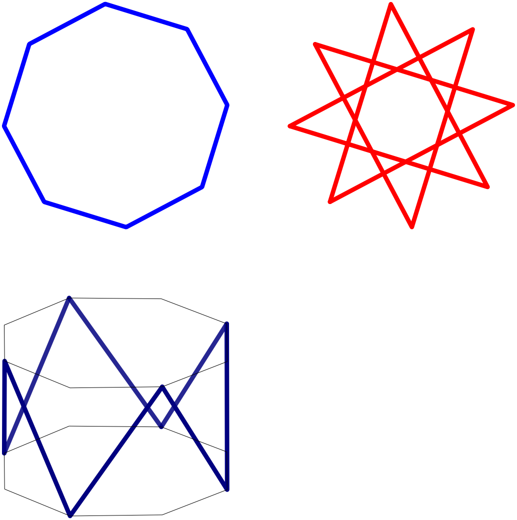
Polígonos

Un polígono es una gráfica conexa y 2-regular realizada en $\mathbb{E}^3$.



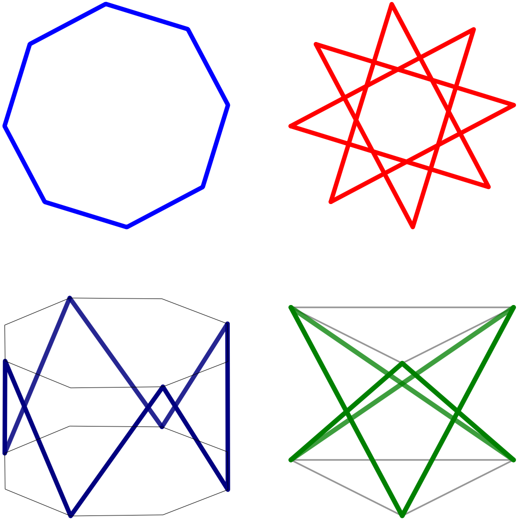
Polígonos

Un polígono es una gráfica conexa y 2-regular realizada en $\mathbb{E}^3$.



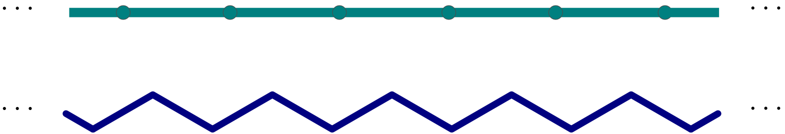
Polígonos

Un polígono es una gráfica conexa y 2-regular realizada en $\mathbb{E}^3$.

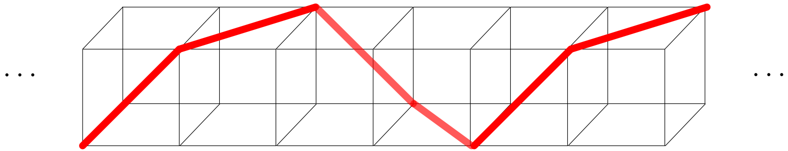


Polígonos

Polígonos



Polígonos



Polígonos

Simetrías

- Una simetría de un polígono es una isometría de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante al polígono.

Polígonos

Simetrías

- Una simetría de un polígono es una isometría de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante al polígono.
- Un polígono es regular si su grupo de simetrías actúa transitivamente en arcos.

Poliedros

Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

- Cada arista está exactamente dos caras.

Poliedros

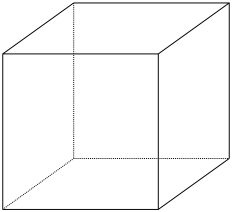
Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

- Cada arista está exactamente dos caras.
- Las figuras verticiales son polígonos.

Poliedros

Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

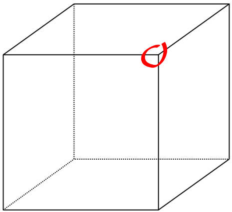
- Cada arista está exactamente dos caras.
- Las figuras verticiales son polígonos.



Poliedros

Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

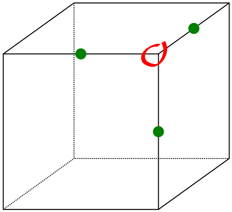
- Cada arista está exactamente dos caras.
- Las figuras verticiales son polígonos.



Poliedros

Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

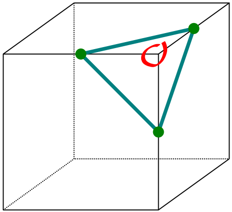
- Cada arista está exactamente dos caras.
- Las figuras verticiales son polígonos.



Poliedros

Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

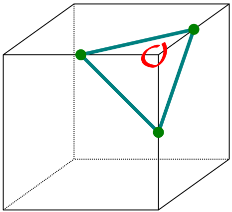
- Cada arista está exactamente dos caras.
- Las figuras verticiales son polígonos.



Poliedros

Un poliedro es una coleccion de polígonos (que llamamos caras) de tal forma que:

- Cada arista está exactamente dos caras.
- Las figuras verticiales son polígonos.



- Es muy conexo.

Poliedros Regulares

- Una bandera es una terna (v, a, c) tal que $v < a < c$.

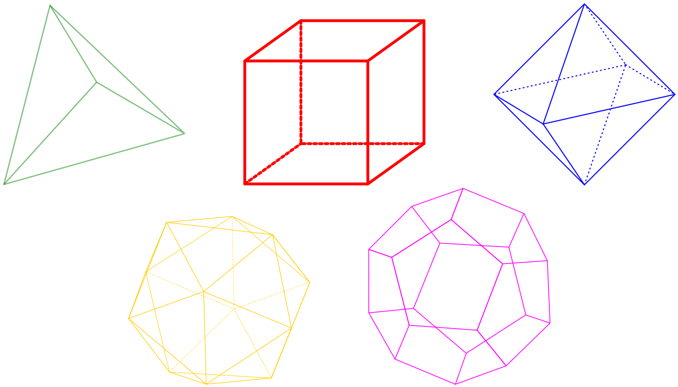
Poliedros Regulares

- Una bandera es una terna (v, a, c) tal que $v < a < c$.
- Una simetría de un poliedro, es una isometría de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante al poliedro.

Poliedros Regulares

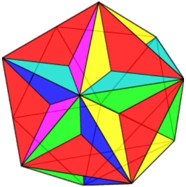
- Una bandera es una terna (v, a, c) tal que $v < a < c$.
- Una simetría de un poliedro, es una isometría de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante al poliedro.
- Un poliedro es regular si su grupo de simetrías actúa transitivamente en banderas.

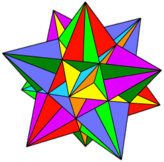
Poliedros Regulares
Sólidos Platónicos



Poliedros Regulares

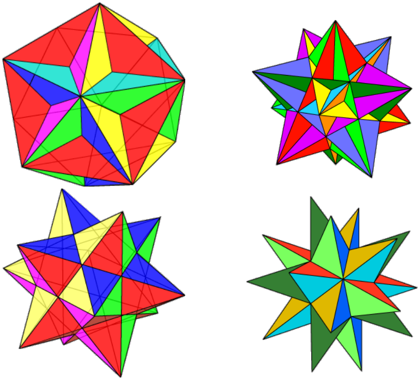
Sólidos de Kepler-Poinsot





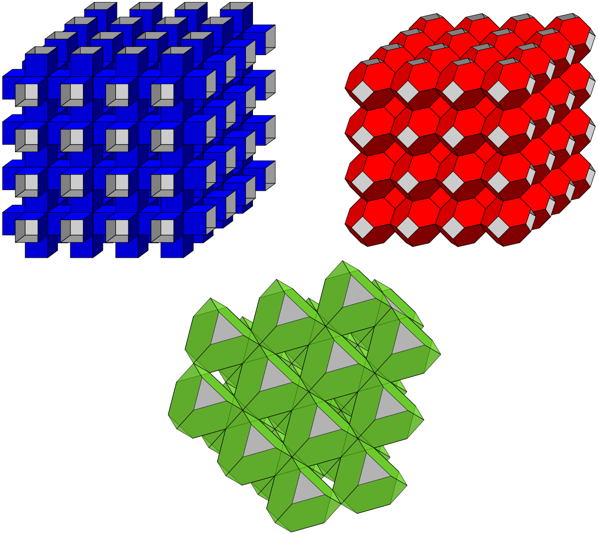
Poliedros Regulares

Sólidos de Kepler-Poinsot

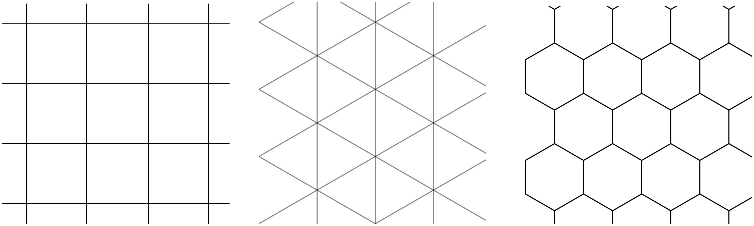


Poliedros Regulares

Poliedros de Petrie-Coxeter

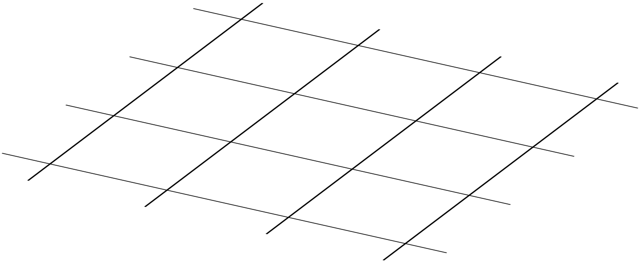


Poliedros Regulares

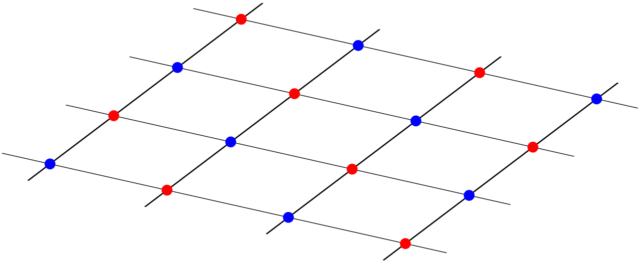


Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados

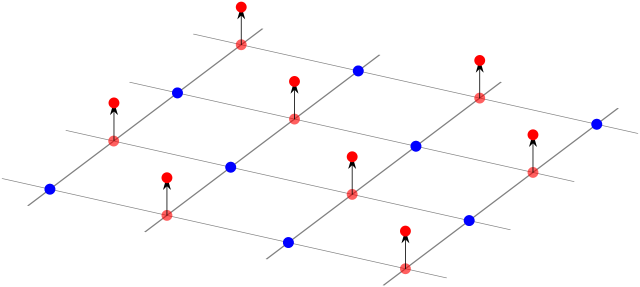


Poliedros Regulares
Poliedros Mezclados



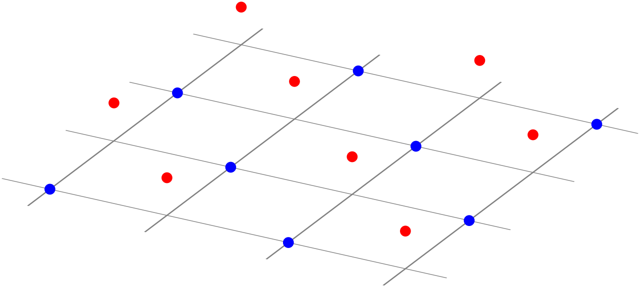
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



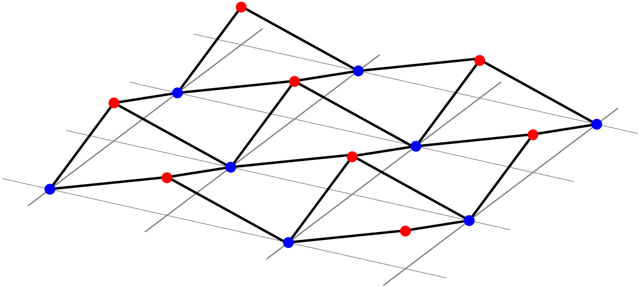
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



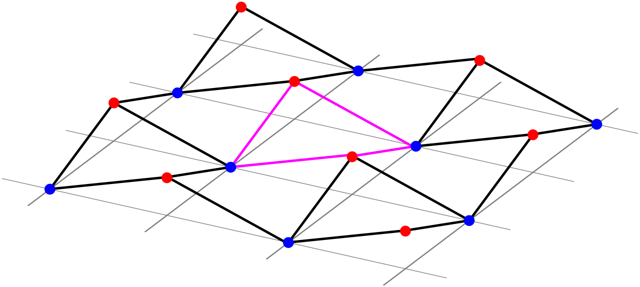
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



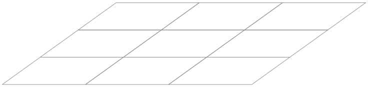
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



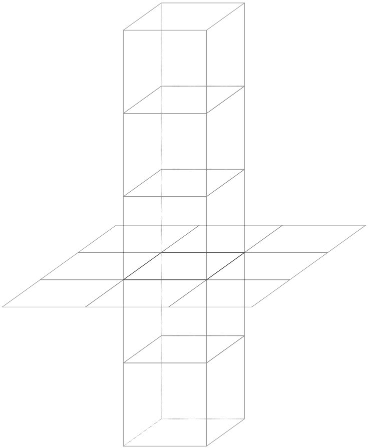
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



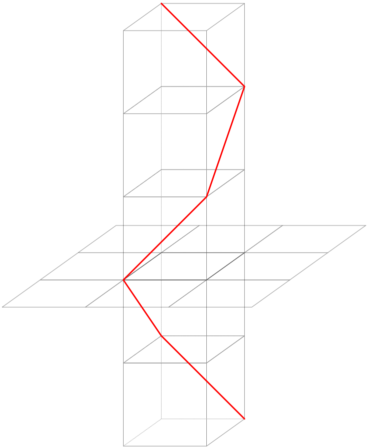
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



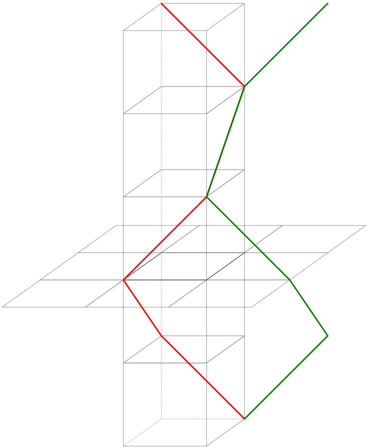
Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



Poliedros Regulares

Poliedros Mezclados



Poliedros Regulares

- En los 70's B. Grünbaum publicó una lista con 47 (¡¡Sí!! ¡¡47!!) poliedros regulares.

Poliedros Regulares

- En los 70's B. Grünbaum publicó una lista con 47 (¡¡Sí!! ¡¡47!!) poliedros regulares.
- A principios de los 80's A. Dress describe otro poliedro y prueba que la lista de 48 poliedros regulares es completa.

Poliedros Regulares

- En los 70's B. Grünbaum publicó una lista con 47 (¡¡Sí!! ¡¡47!!) poliedros regulares.
- A principios de los 80's A. Dress describe otro poliedro y prueba que la lista de 48 poliedros regulares es completa.
- En 1997 E. Schulte y P. McMullen prueban (de otra forma) que la lista de Dress y Grünbaum es completa. Además, describen los grupos de simetrías de los poliedros y los dividen como sigue:
  - 18 poliedros finitos,
  - 6 poliedros planos,
  - 12 poliedros mezclados,
  - 12 poliedros puros.

¿Qué sigue?

- Dimensiones superiores.

¿Qué sigue?

- Dimensiones superiores.
- Menos simetría.

¿Qué sigue?

- Dimensiones superiores.
- Menos simetría.
- Otros espacios.

¿Qué sigue?

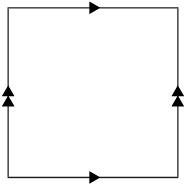
- Dimensiones superiores.
- Menos simetría.
- Otros espacios.

El 3-Toro

Sea $\Lambda = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ un subgrupo de $\mathbb{E}^3$, con v_1, v_2, v_3 linealmente independientes. El 3-Toro asociado a Λ (denotado $\mathbb{T}^3(\Lambda)$) es el espacio $\mathbb{E}^3/\Lambda$.

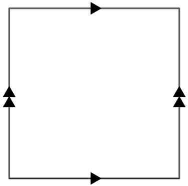
El 3-Toro

Sea $\Lambda = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ un subgrupo de $\mathbb{E}^3$, con v_1, v_2, v_3 linealmente independientes. El 3-Toro asociado a Λ (denotado $\mathbb{T}^3(\Lambda)$) es el espacio $\mathbb{E}^3/\Lambda$.



El 3-Toro

Sea $\Lambda = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ un subgrupo de $\mathbb{E}^3$, con v_1, v_2, v_3 linealmente independientes. El 3-Toro asociado a Λ (denotado $\mathbb{T}^3(\Lambda)$) es el espacio $\mathbb{E}^3/\Lambda$.



$\mathbb{T}^3(\Lambda)$ es espacio métrico con la métrica que hereda de $\mathbb{E}^3$, de modo que tiene sentido pensar en poliedros regulares en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$.

El problema:

Decidir para qué grupos Λ un poliedro regular en $\mathbb{E}^3$ induce un poliedro en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$.

El 3-Toro

¿Cuándo se portan bien las isometrías?

Proposición

Si g *es isometría de* $\mathbb{E}^3$*,* g *induce una isometría* $\hat{g}$ *de* $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ *si y sólo si* g' *preserva a* Λ*.*

El 3-Toro

¿Cuándo se portan bien las isometrías?

Proposición

Si g es isometría de $\mathbb{E}^3$, g induce una isometría $\hat{g}$ de $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ si y sólo si g' preserva a Λ.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^3 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathbb{E}^3 \arrow[d] \\
\mathbb{T}^3(\Lambda) \arrow[r, dotted, "\hat{g}"] & \mathbb{T}^3(\Lambda)
\end{tikzcd}$$

Teorema de Clasificación

- 18 poliedros finitos:
  - 2 cuyo grupo es el del tetraedro.
  - 4 cuyo grupo es el del octaedro.
  - 12 cuyo grupo es el del icosaedro.
- 6 poliedros planos:
  - 2 cuyo grupo es el de la teselación de cuadrados.
  - 4 cuyo grupo es el de la teselación de triángulos.
- 12 poliedros mezclados:
  - 4 mezclados con cada una de las teselaciones.
- 12 poliedros puros.

Teorema

Sea Λ un grupo generado por tres vectores linealmente independientes. Un poliedro regular $\mathcal{P}$ cuyo grupo de simetrías es el del tetraedro induce un poliedro en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ si y sólo si

$$\Lambda \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)}\}.$$

Poliedros Regulares Finitos en $\mathbb{T}^3$

¿Qué pasa con la familia del octaedro?

Poliedros Regulares Finitos en $\mathbb{T}^3$

El Octaedro, el Cubo y el resto de su banda

Teorema

Sea Λ un grupo generado por tres vectores linealmente independientes. Un poliedro regular $\mathcal{P}$ cuyo grupo de simetrías es el del octaedro induce un poliedro en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ si y sólo si

$$\Lambda \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)}\}.$$

Poliedros Regulares Finitos en $\mathbb{T}^3$

¿Y el icosaedro?

Teorema

Sea Λ un grupo generado por 3 vectores linealmente independientes. Si G es un grupo de isometrías de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante a Λ, entonces G no tiene rotaciones de orden distinto a 2, 3, 4 o 6.

Teorema

Sea Λ *un grupo generado por* 3 *vectores linealmente independientes. Si* G *es un grupo de isometrías de* $\mathbb{E}^3$ *que deja invariante a* Λ*, entonces* G *no tiene rotaciones de orden distinto a* 2*,* 3*,* 4 *o* 6*.*

Teorema

Si $\mathcal{P}$ *es un poliedro regular cuyo grupo de simetrías es el del icosaedro, entonces no existe* Λ*, un grupo generado por* 3 *vectores linealmente independientes, de tal forma que* $\mathcal{P}$ *puede ser visto como un poliedro regular en* $\mathbb{T}^3(\Lambda)$*.*

Poliedros Regulares Infinitos en $\mathbb{T}^3$

¿Qué pasa con los poliedros infinitos?

Poliedros Infinitos Puros

Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un poliedro infinito puro, entonces $\mathcal{P}$ induce un poliedro en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ si y solo si

$$\Lambda \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)}\}.$$

Poliedros Infinitos Mezclados

Para estos poliedros existe un plano Π tal que el grupo de simetrías del poliedro permuta los trasladados de $\Pi^{\perp}$.

Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un poliedro de la forma $\{4,4\}\#P$, entonces $\mathcal{P}$ induce un poliedro en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ si y solo si Λ es una de las siguientes latices:

- *Prismas sobre cuadrados, 'paralelos a la teselación'*
- *Prismas sobre cuadrados y centros de prismas.*
- *Prismas sobre cuadrados y centros de caras.*
- *Prismas sobre cuadrados 'a $\frac{\pi}{4}$'.*

Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un poliedro de la forma $\{3,6\}\#P$ o $\{6,3\}\#P$, entonces $\mathcal{P}$ induce un poliedro en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ si y solo si Λ es una de las siguientes latices:

- *Prismas sobre los triángulos.*
- *Prismas sobre triángulos 'a $\frac{\pi}{6}$'.*

Poliedros planos

Teorema

- *El poliedros* $\{4,4\}$ *induce un poliedro en* $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ *si y solo si* Λ *es una de las siguientes latices:*

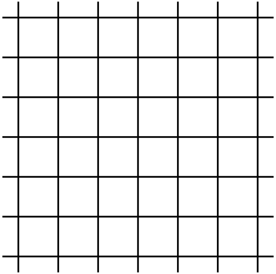
  Prismas sobre cuadrados, 'paralelos a la teselación'.
  Prismas sobre cuadrados y centros de prismas.
  Prismas sobre cuadrados y centros de caras.
  Prismas sobre cuadrados 'a $\frac{\pi}{4}$*'.*

- *Los poliedros* $\{6,3\}$ *y* $\{3,6\}$ *inducen poliedros en* $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ *si y solo si* Λ *es una de las siguientes latices:*

  Prismas sobre los triángulos.
  Prismas sobre triángulos 'a $\frac{\pi}{6}$*'.*

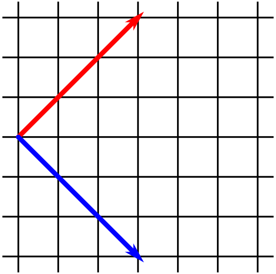
Poliedros planos

En los 70's Coxeter encontró todos los mapas toroidales regulares.



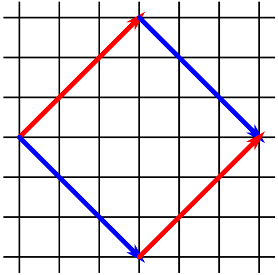
Poliedros planos

En los 70's Coxeter encontró todos los mapas toroidales regulares.



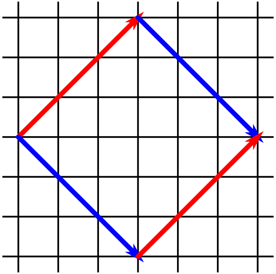
Poliedros planos

En los 70's Coxeter encontró todos los mapas toroidales regulares.



Poliedros planos

En los 70's Coxeter encontró todos los mapas toroidales regulares.



Nuestros resultados para los poliedros planos en $\mathbb{T}^3$ generalizan los obtenidos por Coxeter.

Lo que hicimos y lo que resta por hacer...

- Determinamos todos los grupos Λ para los cuales cada uno de los 48 poliedros regulares de Grünbaum y Dress induce poliedros regulares en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$.

Lo que hicimos y lo que resta por hacer...

- Determinamos todos los grupos Λ para los cuales cada uno de los 48 poliedros regulares de Grünbaum y Dress induce poliedros regulares en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$.
- ¿Existirán poliedros regulares en $\mathbb{T}^3(\Lambda)$ que no sean inducidos por poliedros regulares en $\mathbb{E}^3$?

¡Gracias!