Poliedros Regulares en el 3-Toro.

Antonio Montero * Daniel Pellicer ⋆

*PCCM, UMSNH-UNAM

⋆CCM,UNAM

XXVIII Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas Combinatoria y sus Aplicaciones

Morelia, Marzo 2013.

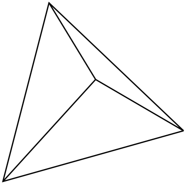
Índice:

Introducción Histórica

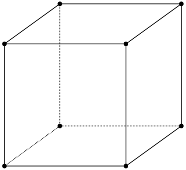
Los griegos conocían los Sólidos Platónicos y probaron que son todos los sólidos convexos regulares.

Introducción Histórica

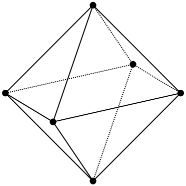
Los griegos conocían los Sólidos Platónicos y probaron que son todos los sólidos convexos regulares.



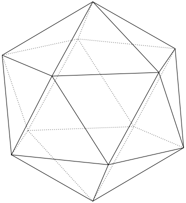
(f) Tetraedro



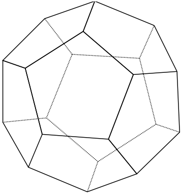
(g) Cubo



(h) Octaedro

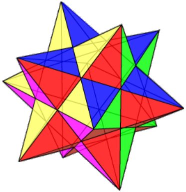


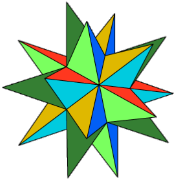
(i) Icosaedro



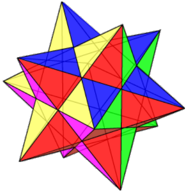
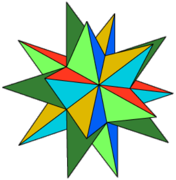
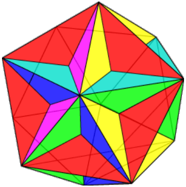
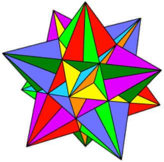
(j) Dodecaedro

Con el tiempo aparecieron más poliedros regulares:





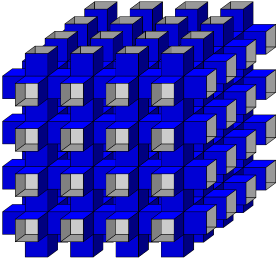
Con el tiempo aparecieron más poliedros regulares:

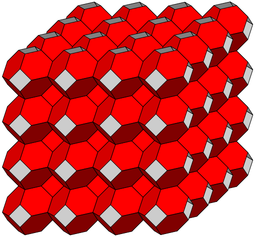





Introducción Histórica

Poliedros de Petrie-Coxeter

.. y más aún...

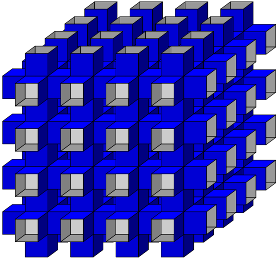


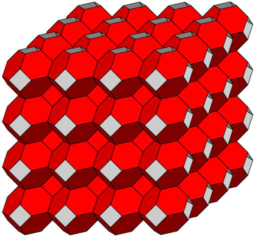


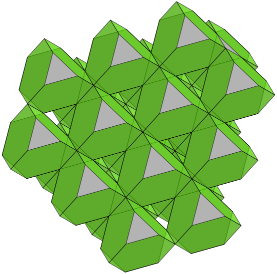
Introducción Histórica

Poliedros de Petrie-Coxeter

.. y más aún...







Introducción Histórica

- En los 70's B. Grünbaum da una lista de 47 (sí ¡¡¡47!!!) poliedros regulares

Introducción Histórica

- En los 70's B. Grünbaum da una lista de 47 (sí ¡¡¡47!!!) poliedros regulares
- A principios de los 80's A. Dress describe otro poliedro y prueba que la lista de 48 poliedros regulares es completa.

Introducción Histórica

- En los 70's B. Grünbaum da una lista de 47 (sí ¡¡¡47!!!) poliedros regulares
- A principios de los 80's A. Dress describe otro poliedro y prueba que la lista de 48 poliedros regulares es completa.
- En 1982 Danzer y Schulte definen politopo abstracto.

Introducción Histórica

- En los 70's B. Grünbaum da una lista de 47 (sí ¡¡¡47!!!) poliedros regulares
- A principios de los 80's A. Dress describe otro poliedro y prueba que la lista de 48 poliedros regulares es completa.
- En 1982 Danzer y Schulte definen politopo abstracto.
- En 1997 P. McMullen y E. Schulte prueban, partiendo del concepto de politopo abstracto, que la lista de Grünbaum y Dress es completa.

Índice:

Poliedros Abstractos

Definición

Un poliedro abstracto $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado con una función de rango en $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Poliedros Abstractos

Definición

Un poliedro abstracto $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado con una función de rango en $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Llamarémos vértices, aristas y caras a los elementos de rango 0, 1 y 2 respectivamente.

Poliedros Abstractos

Definición

Un poliedro abstracto $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado con una función de rango en $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Llamarémos vértices, aristas y caras a los elementos de rango 0, 1 y 2 respectivamente. Una bandera es una terna (v, a, c) con v vértice, a arista y c cara donde $v < a < c$.

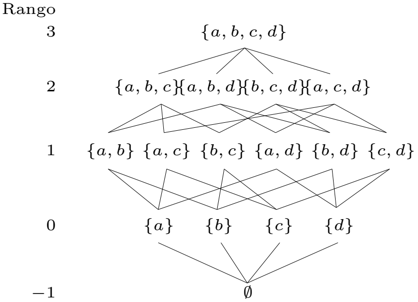
Poliedros Abstractos

Definición

Un poliedro abstracto $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado con una función de rango en $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Llamarémos vértices, aristas y caras a los elementos de rango 0, 1 y 2 respectivamente. Una bandera es una terna (v, a, c) con v vértice, a arista y c cara donde $v < a < c$. Además $\mathcal{P}$ satisface un montón de propiedades.

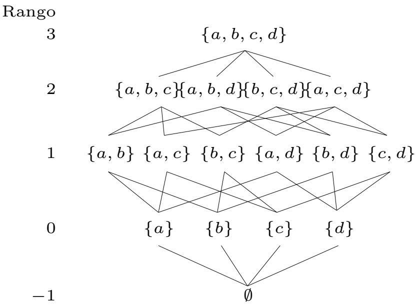
Poliedros Abstractos

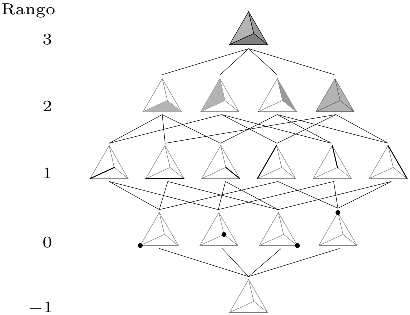
Algunos ejemplos:



Poliedros Abstractos

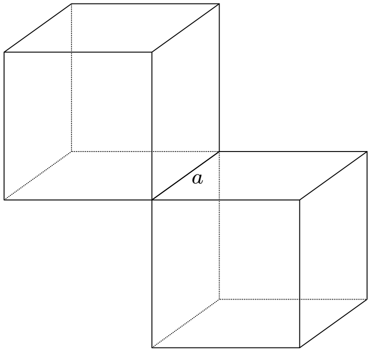
Algunos ejemplos:





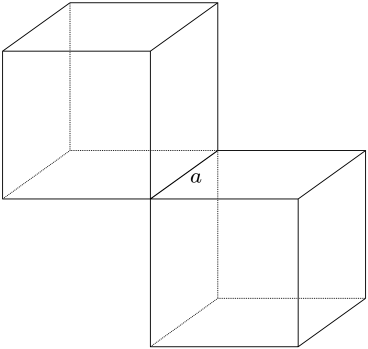
Poliedros Abstractos

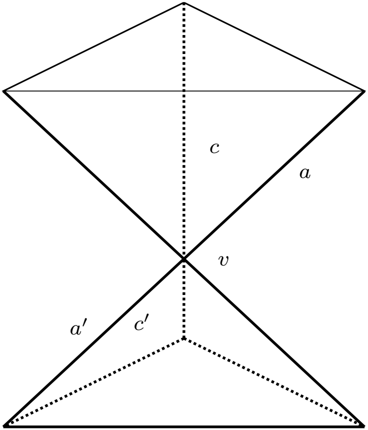
Algunos anti-ejemplos:



Poliedros Abstractos

Algunos anti-ejemplos:





Poliedros Abstractos

Automorfismos

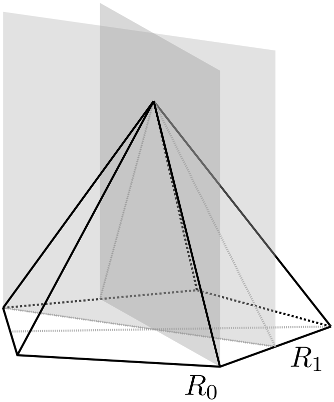
Definición

- Si $\mathcal{P}$ es un poliedro, $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es un automorfismo de $\mathcal{P}$ si ϕ es una biyección y tanto ϕ como ϕ^{-1} preservan orden, es decir, $F \leqslant G$ si y sólo si $\phi(F) \leqslant \phi(G)$.

Definición

- Si $\mathcal{P}$ es un poliedro, $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es un automorfismo de $\mathcal{P}$ si ϕ es una biyección y tanto ϕ como ϕ^{-1} preservan orden, es decir, $F \leqslant G$ si y sólo si $\phi(F) \leqslant \phi(G)$.
- Denotamos por $\Gamma(\mathcal{P})$ al grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$.

Automorfismos



Definición

Diremos que un poliedro $\mathcal{P}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, el conjunto de banderas de $\mathcal{P}$.

Teorema

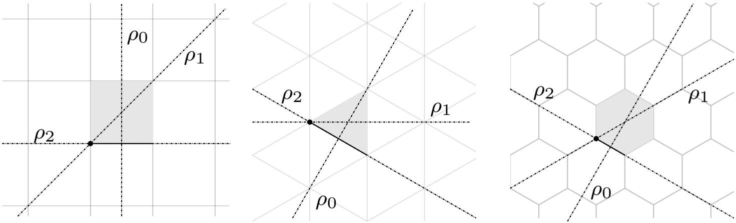
Un poliedro $\mathcal{P}$ es regular si y sólo si para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0,1,2\}$ existe un automorfismo ρ_i de $\mathcal{P}$ tal que

$$\rho_i(\Phi) = \Phi^i.$$

Además, cada automorfismo ρ_i es una involución, es decir, $\rho_i^2 = Id$.

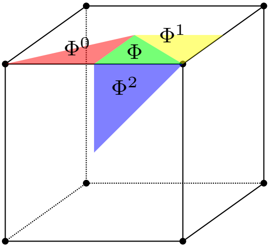
Poliedros Abstractos

Poliedros Regulares



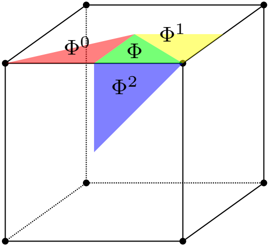
Poliedros Abstractos

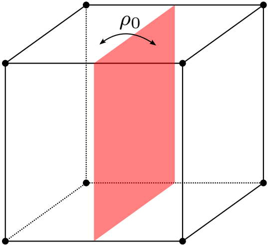
Poliedros Regulares



Poliedros Abstractos

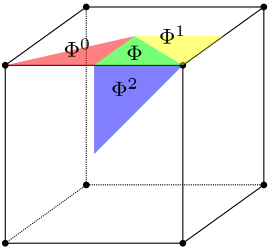
Poliedros Regulares

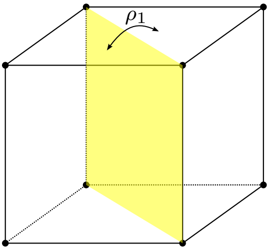




Poliedros Abstractos

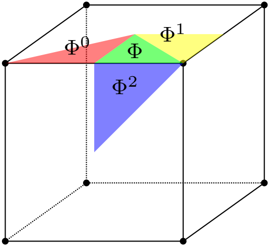
Poliedros Regulares

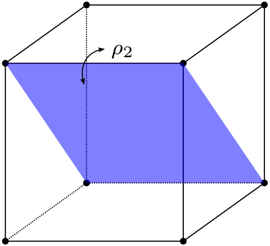




Poliedros Abstractos

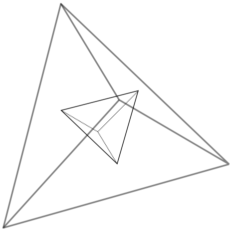
Poliedros Regulares

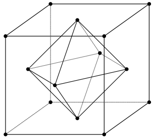


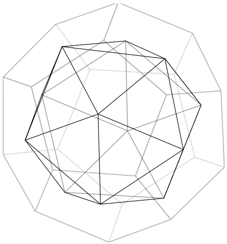


Poliedros Abstractos

Poliedros Duales

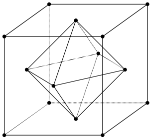


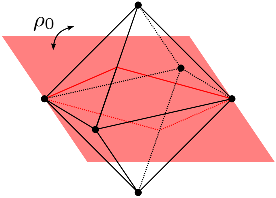




Poliedros Abstractos

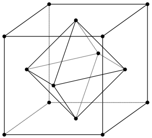
Poliedros Duales

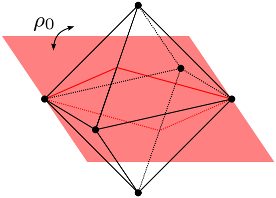


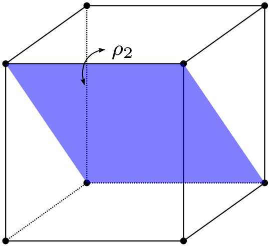


Poliedros Abstractos

Poliedros Duales

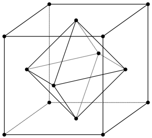


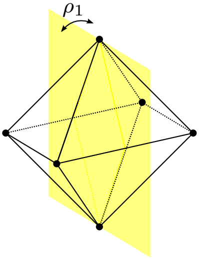


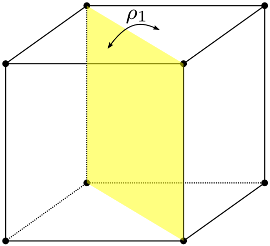


Poliedros Abstractos

Poliedros Duales

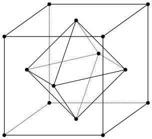


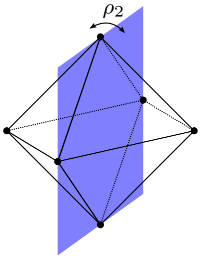


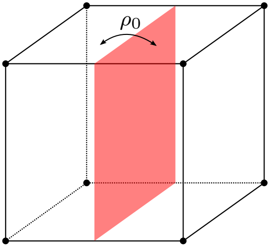


Poliedros Abstractos

Poliedros Duales

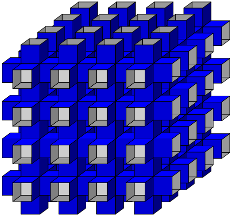






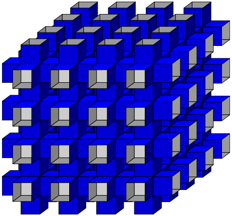
Poliedros Abstractos

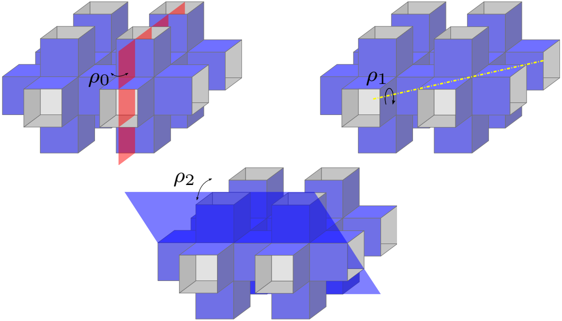
Poliedros Regulares



Poliedros Abstractos

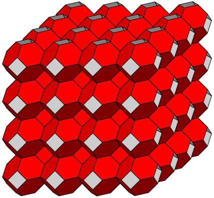
Poliedros Regulares





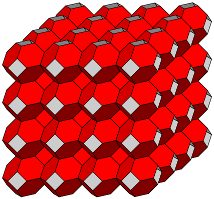
Poliedros Abstractos

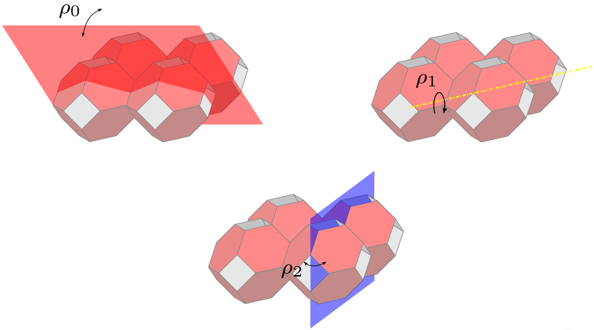
Poliedros Regulares



Poliedros Abstractos

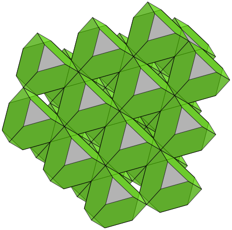
Poliedros Regulares





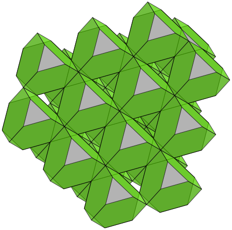
Poliedros Abstractos

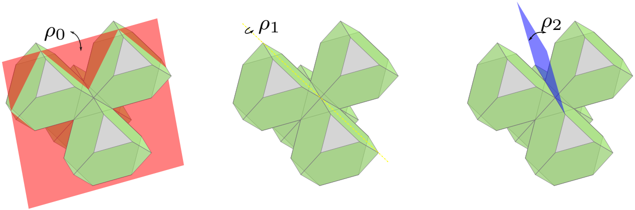
Poliedros Regulares



Poliedros Abstractos

Poliedros Regulares





Operaciones con Poliedros

De manera similar a la dualidad se pueden definir otras operaciones en poliedros regulares. La idea general es, dado un poliedro regular $\mathcal{Q}$, construir un poliedro regular $\mathcal{P}$ a partir de $\mathcal{Q}$ de tal forma que $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{Q})$.

Operaciones con Poliedros

De manera similar a la dualidad se pueden definir otras operaciones en poliedros regulares. La idea general es, dado un poliedro regular $\mathcal{Q}$, construir un poliedro regular $\mathcal{P}$ a partir de $\mathcal{Q}$ de tal forma que $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{Q})$.

McMullen y Schulte prueban que un poliedro regular está totalmente determinado, salvo isomorfismo, por su grupo de automorfismos y sus generadores distinguidos.

Operaciones con Poliedros

Dualidad

$$\delta : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

Operaciones con Poliedros

Dualidad

$$\delta : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

Operación de Petrie:

$$\pi : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

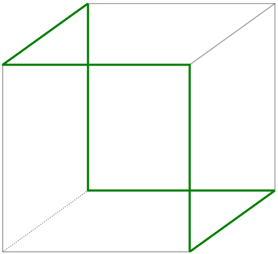
Operaciones con Poliedros

Dualidad

$$\delta : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

Operación de Petrie:

$$\pi : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$



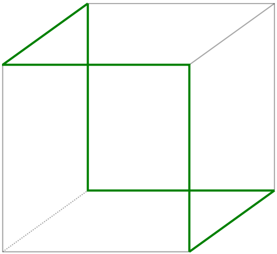
Operaciones con Poliedros

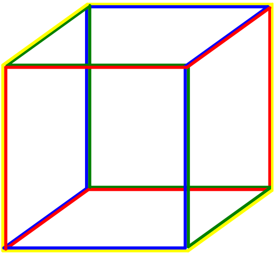
Dualidad

$$\delta : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

Operación de Petrie:

$$\pi : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$





Operaciones con Poliedros

Schulte y McMullen usaron operaciones de este estilo para clasificar a los poliedros finitos en tres familias:

Operaciones con Poliedros

Schulte y McMullen usaron operaciones de este estilo para clasificar a los poliedros finitos en tres familias:

Familia del Tetraedro

$$\{3,3\} \xleftrightarrow{\pi} \{4,3\}_3$$

Operaciones con Poliedros

Schulte y McMullen usaron operaciones de este estilo para clasificar a los poliedros finitos en tres familias:

Familia del Tetraedro

$$\{3,3\} \xleftrightarrow{\pi} \{4,3\}_3$$

Familia del Octaedro

$$\{6,4\}_3 \xleftrightarrow{\pi} \{3,4\} \xleftrightarrow{\delta} \{4,3\} \xleftrightarrow{\pi} \{6,3\}_4$$

Operaciones con Poliedros

Schulte y McMullen usaron operaciones de este estilo para clasificar a los poliedros finitos en tres familias:

Familia del Tetraedro

$$\{3,3\} \xleftrightarrow{\ \pi\ } \{4,3\}_3$$

Familia del Octaedro

$$\{6,4\}_3 \xleftrightarrow{\ \pi\ } \{3,4\} \xleftrightarrow{\ \delta\ } \{4,3\} \xleftrightarrow{\ \pi\ } \{6,3\}_4$$

Familia del Icosaedro

$$\begin{tikzcd}
\{10,5\} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_2"] & \{3,5\} \arrow[r, leftrightarrow, "\delta"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_2"] & \{5,3\} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] & \{10,3\} \\
\{6,\frac{5}{2}\} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] & \{5,\frac{5}{2}\} \arrow[r, leftrightarrow, "\delta"] & \{\frac{5}{2},5\} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_2"] & \{6,5\} \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_2"] \\
\{\frac{10}{3},3\} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] & \{\frac{5}{2},3\} \arrow[r, leftrightarrow, "\delta"] & \{3,\frac{5}{2}\} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] & \{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\}
\end{tikzcd}$$

Realizaciones de Poliedros Regulares

Definición

Una realización de un poliedro abstracto $\mathcal{P}$ es una función $\beta : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{E}^3$ donde $\mathcal{P}_0$ es el conjunto de vértices de $\mathcal{P}$ de tal forma que cada automorfismo de $\Gamma(\mathcal{P})$ induce una isometría en $Aff(\beta(\mathcal{P}_0))$.

Realizaciones de Poliedros Regulares

- Dada una realización, es posible recuperar la estructura del poliedro definiendo recursivamente funciones $\beta_i : \mathcal{P}_i \to \mathscr{P}(V_i)$.

Realizaciones de Poliedros Regulares

- Dada una realización, es posible recuperar la estructura del poliedro definiendo recursivamente funciones $\beta_i : \mathcal{P}_i \to \mathscr{P}(V_i)$.
- Diremos que una realización β es fiel si β_i es inyectiva para toda $i \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Realizaciones de Poliedros Regulares

- Dada una realización, es posible recuperar la estructura del poliedro definiendo recursivamente funciones $\beta_i : \mathcal{P}_i \to \mathscr{P}(V_i)$.
- Diremos que una realización β es fiel si β_i es inyectiva para toda $i \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
- Diremos que β es discreta si $V = \beta(\mathcal{P}_0)$ es un conjunto discreto.

Índice:

El 3-Toro

Si $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ es un grupo de traslaciones con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linealmente independientes definimos el 3-toro generado por τ como

$$\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{E}^3/\tau = \{[x]_\tau : x \in \mathbb{E}^3\}$$

El 3-Toro

Si $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ es un grupo de traslaciones con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linealmente independientes definimos el 3-toro generado por τ como

$$\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{E}^3/\tau = \{[x]_\tau : x \in \mathbb{E}^3\}$$

Definimos la métrica e_τ en $\mathbb{T}^3_\tau$ por:

$$e_\tau\left([x]_\tau, [y]_\tau\right) = \text{ínf}\left\{e(t_1(x), t_2(y)) : t_1, t_2 \in \tau\right\}.$$

El problema:

Decidir para qué grupos τ generados por 3 traslaciones linealmente independientes un poliedro regular $\mathcal{P}$ realizado en $\mathbb{E}^3$ tiene realización discreta en $\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{E}^3/\tau$.

El problema:

Decidir para qué grupos τ generados por 3 traslaciones linealmente independientes un poliedro regular $\mathcal{P}$ realizado en $\mathbb{E}^3$ tiene realización discreta en $\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{E}^3/\tau$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, dotted] & \mathbb{E}^3 \arrow[d] \\ & \mathbb{T}^3_\tau \end{tikzcd}$$

El 3-Toro

¿Cuándo se portan bien las isometrías?

Proposición

Si g es isometría de $\mathbb{E}^3$, g induce una isometría $\hat{g}$ de $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si $g \in \mathcal{N}(\tau)$, el normalizador de τ en $Isom(\mathbb{E}^3)$.

El 3-Toro

¿Cuándo se portan bien las isometrías?

Proposición

Si g es isometría de $\mathbb{E}^3$, g induce una isometría $\hat{g}$ de $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si $g \in \mathcal{N}(\tau)$, el normalizador de τ en $Isom(\mathbb{E}^3)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{E}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^3_\tau & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathbb{T}^3_\tau \end{array}$$

Retículas de Puntos

Si $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ es un grupo generado por tres traslaciones linealmente independientes la retícula de puntos asociada a τ, denotada por Λ_τ, es el conjunto

$$\Lambda_\tau = [0]_\tau = \{mv_1 + nv_2 + kv_3 : m, n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Retículas de Puntos

Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.

Retículas de Puntos

Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,0)}$.

Retículas de Puntos

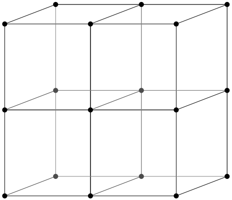
Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,1),(2,0,0),(0,2,0) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,1)}$.

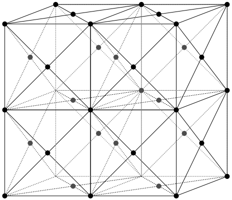
Retículas de Puntos

Ejemplos

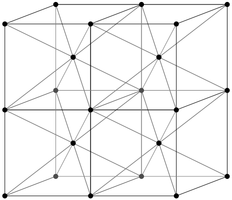
- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,1),(2,0,0),(0,2,0) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,1)}$.



(a) $\Lambda_{(1,0,0)}$



(b) $\Lambda_{(1,1,0)}$



(c) $\Lambda_{(1,1,1)}$

¿Cuándo las isometrías se portan bien con las retículas?

Proposición

Sean τ un grupo de traslaciones generado por 3 traslaciones linealmente independientes, $g \in Isom(\mathbb{E}^3)$. Entonces $g \in \mathcal{N}(\tau)$ si y sólo si g' preserva a Λ_τ.

Primera aproximación:

Estudiar retículas invariantes bajo reflexiones.

Retículas Invariantes Bajo Reflexiones

Si Λ es una retícula invariante bajo la reflexión por un plano Π que intersecta a Λ, entonces Λ tiene (a lo más) dos clases de puntos:

Retículas Invariantes Bajo Reflexiones

Si Λ es una retícula invariante bajo la reflexión por un plano Π que intersecta a Λ, entonces Λ tiene (a lo más) dos clases de puntos:

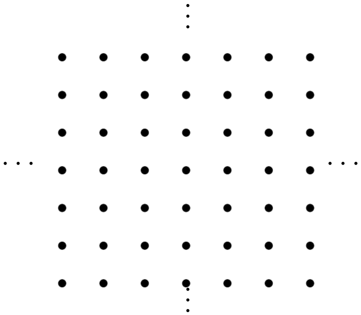
- Aquellos cuya proyección en Π es un punto de $\Lambda \cap \Pi$.

Retículas Invariantes Bajo Reflexiones

Si Λ es una retícula invariante bajo la reflexión por un plano Π que intersecta a Λ, entonces Λ tiene (a lo más) dos clases de puntos:

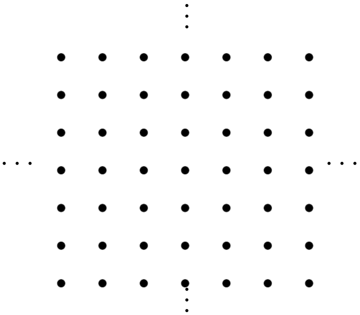
- Aquellos cuya proyección en Π es un punto de $\Lambda \cap \Pi$.
- Aquellos cuya proyección en Π es punto medio entre dos puntos de $\Lambda \cap \Pi$.

Un poco de simbología

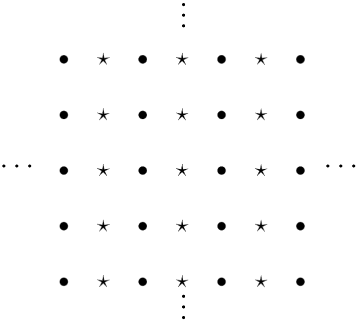


(a) Proyección de $\Lambda_{(1,0,0)}$ en el plano $x = 0$.

Un poco de simbología

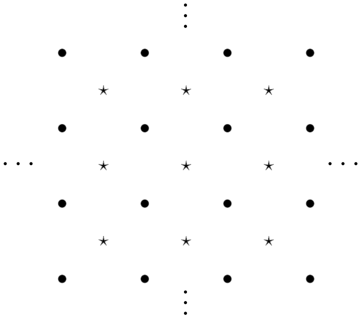


(a) Proyección de $\Lambda_{(1,0,0)}$ en el plano $x = 0$.



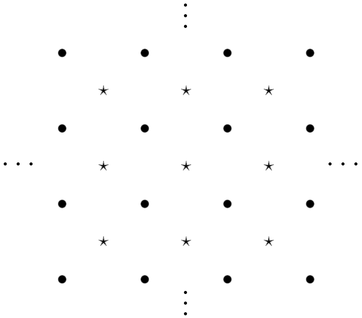
(b) Proyección de $\Lambda_{(1,0,0)}$ en el plano $x = y$.

Un poco de simbología

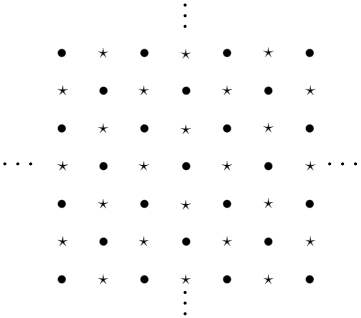


(c) Proyección de $\Lambda_{(1,1,1)}$ en el plano $x = 0$.

Un poco de simbología



(c) Proyección de $\Lambda_{(1,1,1)}$ en el plano $x = 0$.



(d) Proyección de $\Lambda_{(1,1,0)}$ en el plano $y = 0$.

Índice:

Poliedros Regulares en $\mathbb{T}^3_\tau$

¿Qué hemos hecho?

- Dimos un criterio algebraico para determinar cuándo un poliedro regular realizado en $\mathbb{E}^3$ admite realización en $\mathbb{T}^3$.

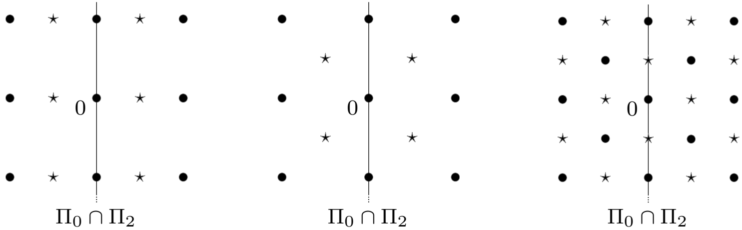
- Dimos un criterio algebraico para determinar cuándo un poliedro regular realizado en $\mathbb{E}^3$ admite realización en $\mathbb{T}^3$.
- Traducimos el criterio algebraico a un criterio geométrico en términos de retículas.

Poliedros Regulares en $\mathbb{T}^3_\tau$

¿Qué hemos hecho?

- Dimos un criterio algebraico para determinar cuándo un poliedro regular realizado en $\mathbb{E}^3$ admite realización en $\mathbb{T}^3$.
- Traducimos el criterio algebraico a un criterio geométrico en términos de retículas.
- Determinamos condiciones para que una retícula quede invariante bajo una reflexión por un plano.

Si τ es un grupo generado por tres traslaciones linealmente independientes de tal forma que Λ_τ queda invariante bajo $\Gamma(\mathcal{T})$, entonces la proyección de Λ_τ al plano de reflexión de ρ_1 ve como alguna de las siguientes:



Teorema

Sea τ un grupo generado por tres traslaciones linealmente independientes. El tetraedro regular $\mathcal{T}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 2, c > \frac{2}{\sqrt{3}}\}.$$

Poliedros Regulares Finitos en $\mathbb{T}^3_\tau$

¿Qué pasa con la familia del octaedro?

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El octaedro regular admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 1c > 1\}.$$

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El octaedro regular admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 1c > 1\}.$$

Corolario

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El cubo $\mathcal{C}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 2, c > 2\}.$$

Poliedros Regulares Finitos en $\mathbb{T}^3_\tau$

¿Y el icosaedro?

Teorema

Sea τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes. Si G es un grupo de isometrías de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante a Λ_τ, entonces G no tiene rotaciones de orden distinto a 2, 3, 4 o 6.

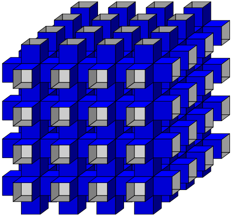
Teorema

Sea τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes. Si G es un grupo de isometrías de $\mathbb{E}^3$ que deja invariante a Λ_τ, entonces G no tiene rotaciones de orden distinto a 2, 3, 4 o 6.

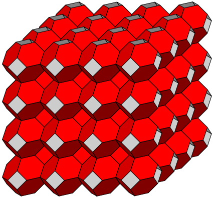
Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un poliedro de la familia del icosaedro, entonces no existe τ, un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes, de tal forma que $\mathcal{P}$ tenga realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.

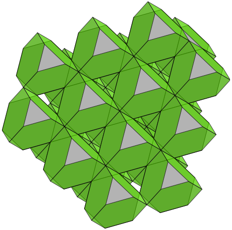
Poliedros de Petrie-Coxeter en $\mathbb{T}^3_\tau$



(a) $\{4, 6|4\}$



(b) $\{6, 4|4\}$



(c) $\{6, 6|3\}$

Poliedros de Petrie-Coxeter en $\mathbb{T}^3_\tau$

$\{4, 6|4\}$ y $\{6, 4|4\}$

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro $\{4, 6|4\}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{4a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Poliedros de Petrie-Coxeter en $\mathbb{T}^3_\tau$

$\{4,6|4\}$ y $\{6,4|4\}$

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro $\{4,6|4\}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{4a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a,b,c \in \mathbb{Z}\}.$$

Corolario

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro $\{6,4|4\}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{4a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a,b,c \in \mathbb{Z}\}.$$

Poliedros de Petrie-Coxeter en $\mathbb{T}^3_\tau$

$\{6,6|3\}$

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro $\{6,6|3\}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{8a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 8c\Lambda_{(1,1,1)} : a,b,c \in \mathbb{Z}\}.$$

Índice:

Conclusiones

¿Qué hicimos?

- Abordamos el problema de determinar aquellos grupos τ generados por tres traslaciones linealmente independientes para los cuales, un poliedro realizado en $\mathbb{E}^3$, admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.

Conclusiones

¿Qué hicimos?

- Abordamos el problema de determinar aquellos grupos τ generados por tres traslaciones linealmente independientes para los cuales, un poliedro realizado en $\mathbb{E}^3$, admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.
- Estudiamos las retículas Λ_τ asociadas a los grupos τ, las cuales nos permitieron, por medio de análisis geométrico, determinar condiciones para que los poliedros fueran realizados.

Conclusiones

¿Qué hicimos?

- Clasificamos los grupos τ para todos los poliedros finitos, así como para los poliedros de Petrie-Coxeter obteniendo los siguientes resultados:

Conclusiones

¿Qué hicimos?

- Clasificamos los grupos τ para todos los poliedros finitos, así como para los poliedros de Petrie-Coxeter obteniendo los siguientes resultados:
  - Un poliedro de la familia del tetraedro, de la familia del octaedro o de la familia de alguno de los poliedros de Petrie-Coxeter admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si Λ_τ es $a\Lambda_{(1,0,0)}$, $b\Lambda_{(1,1,0)}$ o $c\Lambda_{(1,1,1)}$ para algunos parámetros a, b y c que dependen de las coordenadas de los vértices del poliedro.

Conclusiones

¿Qué hicimos?

- Clasificamos los grupos τ para todos los poliedros finitos, así como para los poliedros de Petrie-Coxeter obteniendo los siguientes resultados:
  - Un poliedro de la familia del tetraedro, de la familia del octaedro o de la familia de alguno de los poliedros de Petrie-Coxeter admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si Λ_τ es $a\Lambda_{(1,0,0)}$, $b\Lambda_{(1,1,0)}$ o $c\Lambda_{(1,1,1)}$ para algunos parámetros a, b y c que dependen de las coordenadas de los vértices del poliedro.
  - No existe grupo τ de tal forma que un poliedro de la familia del icosaedro tenga realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.

Conclusiones

¿Qué queda por hacer?

- Completar las lista de los 48.

Conclusiones

¿Qué queda por hacer?

- Completar las lista de los 48.
- Completar la lista saltándose la realización en $\mathbb{E}^3$.

Conclusiones

¿Qué queda por hacer?

- Completar las lista de los 48.
- Completar la lista saltándose la realización en $\mathbb{E}^3$.
- Explorar otras 3-variedades.

¡Gracias!