Permutaciones: ¿Funciones biyectivas o simples revolturas?

José Antonio Montero Aguilar
Asesora: Dra. María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas - UMSNH

XLIV Congreso SMM
10 de Octubre de 2011

¿Qué haremos?

Regalos

A una fiesta asisten n personas. Cada una lleva un regalo, se juntan todos los regalos y se sortean de manera que a cada persona le toque uno de los regalos. ¿A cuántas personas se espera que les toque su propio regalo?.

¿Qué haremos?

Saltos de longitud

Un grupo de n jóvenes compite cada día en saltos de longitud. Nunca se repiten las distancias que logran (es decir, no hay empates). En un día promedio ¿Cuantas veces se rompe el récord de ese mismo día?

¿Qué haremos?

El avión

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera.

¿Qué haremos?

El avión

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera.Cuando el último pasajero entra al avión, va al siento que le corresponde y, si lo encuentra ocupado, le pide al pasajero que está en su asiento que se mueva;

¿Qué haremos?

El avión

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera.Cuando el último pasajero entra al avión, va al siento que le corresponde y, si lo encuentra ocupado, le pide al pasajero que está en su asiento que se mueva; en ese caso, el pasajero que dejó el asiento hace lo mismo y así sucesivamente hasta que todos están sentados.

¿Qué haremos?

El avión

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera.Cuando el último pasajero entra al avión, va al siento que le corresponde y, si lo encuentra ocupado, le pide al pasajero que está en su asiento que se mueva; en ese caso, el pasajero que dejó el asiento hace lo mismo y así sucesivamente hasta que todos están sentados. ¿Cuál es la probabilidad de que un determinado pasajero (no el último en llegar) tenga que cambiar su asiento?

¿Qué haremos?

El Juego del 15

¿Qué haremos?

El Juego del 15

El Juego del 15

¿Qué es?

Niños y sillas

Problema

¿ De cuántas formas se pueden sentar Juan, Paty, Beto, Ana y Toño en 5 sillas numeradas del 1 al 5?

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de { J, P, B, A, T }

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de { J, P, B, A, T }
BATPJ$\longleftrightarrow$

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de { J, P, B, A, T }
BATPJ$\longleftrightarrow$Beto está en silla 1, Ana en silla 2, Toño en silla 3,

Paty en silla 4 y Juan en silla 5.

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de { J, P, B, A, T }
BATPJ$\longleftrightarrow$Beto está en silla 1, Ana en silla 2, Toño en silla 3,

Paty en silla 4 y Juan en silla 5. Tenemos entonces:

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de { J, P, B, A, T }
BATPJ$\longleftrightarrow$Beto está en silla 1, Ana en silla 2, Toño en silla 3,

Paty en silla 4 y Juan en silla 5. Tenemos entonces:

5

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de { J, P, B, A, T }
BATPJ$\longleftrightarrow$Beto está en silla 1, Ana en silla 2, Toño en silla 3,

Paty en silla 4 y Juan en silla 5. Tenemos entonces:

$$5 \times 4$$

Niños y Sillas

Solución

Acomodo $\longleftrightarrow$ Revoltura de $\{$ J, P, B, A, T $\}$
BATPJ$\longleftrightarrow$Beto está en silla 1, Ana en silla 2, Toño en silla 3,

Paty en silla 4 y Juan en silla 5. Tenemos entonces:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

acomodos posibles.

Algunos nombres

- Dado un conjunto finito A, cada 'revoltura' de A se llama *permutación de A*.

Algunos nombres

- Dado un conjunto finito A, cada 'revoltura' de A se llama *permutación de A*.
- El conjunto $[n]$ es el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Algunos nombres

- Dado un conjunto finito A, cada 'revoltura' de A se llama *permutación de* A.
- El conjunto $[n]$ es el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Hay un total de $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ permutaciones de $[n]$.

Algunos nombres

(Para grandes)

Observemos que una permutación es también una función biyectiva $\sigma : [n] \to [n]$ y si $\sigma(i) = a_i$ hay dos formas naturales de denotarla:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Algunos nombres

(Para grandes)

Observemos que una permutación es también una función biyectiva $\sigma : [n] \to [n]$ y si $\sigma(i) = a_i$ hay dos formas naturales de denotarla:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

Algunos nombres

(Para grandes)

Observemos que una permutación es también una función biyectiva $\sigma : [n] \to [n]$ y si $\sigma(i) = a_i$ hay dos formas naturales de denotarla:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

esta última se llama *forma lineal*.

Niños y Mesas

Problema

Un grupo de n niños se va a repatir en grupos y cada grupo se sentará a trabajar en una mesa redonda ¿De cuántas formas pueden acomodarse? (Lo que importa es la posición relativa de cada niño en su mesa).

Niños y Mesas

Solución

Si $f(n)$ es el número que buscamos, calculemos recursivamente

- $f(1) = 1$.

Niños y Mesas

Solución

Si $f(n)$ es el número que buscamos, calculemos recursivamente

- $f(1) = 1$.
- Para $n \geq 2$, $f(n) = n \times f(n-1)$.

Niños y Mesas

Solución

Si $f(n)$ es el número que buscamos, calculemos recursivamente

- $f(1) = 1$.
- Para $n \geq 2$, $f(n) = n \times f(n-1)$.
- Por lo tanto $f(n) = n!$

¿No es sorprendente?

Existe una correspondencia entre cada ‘acomodo’ en el problema anterior y una permutación:

¿No es sorprendente?

Existe una correspondencia entre cada ‘acomodo’ en el problema anterior y una permutación:
Basta pensar que a la derecha del niño i está sentado el niño $\sigma(i)$.

Forma cíclica

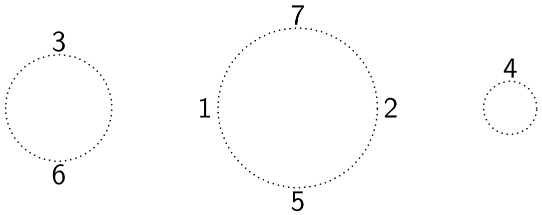
Ejemplo

Así, por ejemplo, a la permutación $\sigma = ({}^{1}5, {}^{2}7, {}^{3}6, {}^{4}4, {}^{5}2, {}^{6}3, {}^{7}1)$ le corresponde el acomodo:

Forma cíclica

Ejemplo

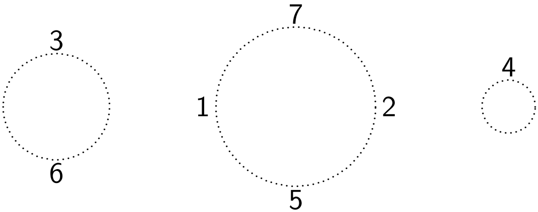
Así, por ejemplo, a la permutación $\sigma = ({}^{1}5, {}^{2}7, {}^{3}6, {}^{4}4, {}^{5}2, {}^{6}3, {}^{7}1)$ le corresponde el acomodo:



Forma cíclica

Ejemplo

Así, por ejemplo, a la permutación $\sigma = ({}^{1}5, {}^{2}7, {}^{3}6, {}^{4}4, {}^{5}2, {}^{6}3, {}^{7}1)$ le corresponde el acomodo:



Obteniendo la *forma cíclica* de la permutación:

$$\sigma = (1\ 5\ 2\ 7)(3\ 6)(4)$$

Forma cílica

- Una misma permutación tiene varias formas cíclicas,
así (3 6)(2 7 1 5)(4) y (4)(6 3)(7 1 5 2) son también formas cíclicas de (1 5 2 7)(3 6)(4).

Forma cílica

- Una misma permutación tiene varias formas cíclicas, así (3 6)(2 7 1 5)(4) y (4)(6 3)(7 1 5 2) son también formas cíclicas de (1 5 2 7)(3 6)(4).
- Cada una de las mesas es un *ciclo*, la *longitud del ciclo* es el número de niños en esa mesa.

Forma cílica

- Una misma permutación tiene varias formas cíclicas, así (3 6)(2 7 1 5)(4) y (4)(6 3)(7 1 5 2) son también formas cíclicas de (1 5 2 7)(3 6)(4).
- Cada una de las mesas es un *ciclo*, la *longitud del ciclo* es el número de niños en esa mesa.
- Un ciclo de longitud 2 es un *biciclo* y un ciclo de longitud r es un r-*ciclo*. Un *punto fijo* en σ es un $i \in [n]$ tal que $\sigma(i) = i$.

La *forma cíclica canónica* de una permutación se obtiene por:

La *forma cíclica canónica* de una permutación se obtiene por:

- Para cada ciclo, se escribe primero el número más grande del ciclo.

La *forma cíclica canónica* de una permutación se obtiene por:

- Para cada ciclo, se escribe primero el número más grande del ciclo.
- Se ordenan los ciclos de tal forma que tengan su primer elemento en orden creciente.

Forma cíclica

Forma cíclica canónica

La *forma cíclica canónica* de una permutación se obtiene por:

- Para cada ciclo, se escribe primero el número más grande del ciclo.
- Se ordenan los ciclos de tal forma que tengan su primer elemento en orden creciente.

Así, la forma cíclica canónica de $(1\ 5\ 2\ 7)(3\ 6)(4)$ es:

$$(4)(6\ 3)(7\ 1\ 5\ 2)$$

Forma cíclica

Un ejemplo

Asi, por ejemplo, para la permutacion $({}^{1}8, {}^{2}2, {}^{3}4, {}^{4}6, {}^{5}3, {}^{6}5, {}^{7}7, {}^{8}1)$ tenemos:

Forma cíclica

Un ejemplo

Asi, por ejemplo, para la permutacion $({}^{1}8, {}^{2}2, {}^{3}4, {}^{4}6, {}^{5}3, {}^{6}5, {}^{7}7, {}^{8}1)$ tenemos:

$(8, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 1)$

Forma cíclica

Un ejemplo

Asi, por ejemplo, para la permutacion $({}^1 8, {}^2 2, {}^3 4, {}^4 6, {}^5 3, {}^6 5, {}^7 7, {}^8 1)$ tenemos:

$$(8, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 1) = (1\ 8)(2)(3\ 4\ 6\ 5)(7)$$

Forma cíclica

Un ejemplo

Asi, por ejemplo, para la permutacion $({}^{1}8, {}^{2}2, {}^{3}4, {}^{4}6, {}^{5}3, {}^{6}5, {}^{7}7, {}^{8}1)$ tenemos:

$$(8, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 1) = (1\ 8)(2)(3\ 4\ 6\ 5)(7) = (2)(6\ 5\ 3\ 4)(7)(8\ 1)$$

Forma cíclica

Un ejemplo

Asi, por ejemplo, para la permutacion $({}^{1}8, {}^{2}2, {}^{3}4, {}^{4}6, {}^{5}3, {}^{6}5, {}^{7}7, {}^{8}1)$ tenemos:

$$(8, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 1) = (1\ 8)(2)(3\ 4\ 6\ 5)(7) = (2)(6\ 5\ 3\ 4)(7)(8\ 1)$$

Forma cíclica

Observemos que si a una permutación escrita en su forma cíclica (canónica) le quitamos los paréntesis, la podemos considerar otra permutación pero escrita en formal lineal.

Forma cíclica

Observemos que si a una permutación escrita en su forma cíclica (canónica) le quitamos los paréntesis, la podemos considerar otra permutación pero escrita en formal lineal.

Para nuestro ejemplo:

$$(4)(6\ 3)(7\ 1\ 5\ 2) \longmapsto (4, 6, 3, 7, 1, 5, 2)$$

Forma cíclica

Observemos que si a una permutación escrita en su forma cíclica (canónica) le quitamos los paréntesis, la podemos considerar otra permutación pero escrita en formal lineal.

Para nuestro ejemplo:

$$(4)(6\ 3)(7\ 1\ 5\ 2) \longmapsto (4,6,3,7,1,5,2) = (3)(7\ 2\ 6\ 5\ 1\ 4)$$

Al conjunto de todas las permutaciones de $[n]$ se le denota por S_n.

Al conjunto de todas las permutaciones de $[n]$ se le denota por S_n.

Proposición

La función $\Theta : S_n \to S_n$ dada por 'quitar paréntesis' es una biyección.

Forma cíclica

La función Θ

Al conjunto de todas las permutaciones de $[n]$ se le denota por S_n.

Proposición

La función $\Theta : S_n \to S_n$ dada por 'quitar paréntesis' es una biyección.

Demostración.

Es fácil construir la función inversa Θ^{-1}. ☺

Forma cíclica

La función Θ

- $\Theta(4\ 1)(6\ 2\ 5\ 3)(8\ 7) = (4, 1, 6, 2, 5, 3, 8, 7)$

Forma cíclica

La función Θ

- $\Theta(4\ 1)(6\ 2\ 5\ 3)(8\ 7) = (4, 1, 6, 2, 5, 3, 8, 7)$
- $\Theta^{-1}(6, 1, 3, 7, 5, 2, 9, 8, 4) = (6\ 1\ 3)(7\ 5\ 2)(9\ 8\ 4)$

Forma cíclica

La función Θ

- $\Theta(4\ 1)(6\ 2\ 5\ 3)(8\ 7) = (4, 1, 6, 2, 5, 3, 8, 7)$
- $\Theta^{-1}(6, 1, 3, 7, 5, 2, 9, 8, 4) = (6\ 1\ 3)(7\ 5\ 2)(9\ 8\ 4)$

Dado $i \in [n]$ ¿Cuántas permutaciones de S_n hay en las que i está en un k-ciclo?

Dado $i \in [n]$ ¿Cuántas permutaciones de S_n hay en las que i está en un k-ciclo?

Solución.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i = n$.

La función Θ

Una aplicación

Dado $i \in [n]$ ¿Cuántas permutaciones de S_n hay en las que i está en un k-ciclo?

Solución.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i = n$. Usando la función Θ para cambiar de la forma canónica a la forma lineal, nos interesa contar las permutaciones σ tales que $\sigma(n-k+1) = n$, las cuales son, obviamente, $(n-1)!$ ☺

Un poco de álgebra

- Composición de permutaciones es permutación.
- Cada ciclo de una permutación es, por sí mismo, una permutación.

Un poco de álgebra

- Composición de permutaciones es permutación.
- Cada ciclo de una permutación es, por sí mismo, una permutación.
- Toda permutación es *producto* de sus ciclos.

Un poco de álgebra

- Composición de permutaciones es permutación.
- Cada ciclo de una permutación es, por sí mismo, una permutación.
- Toda permutación es *producto* de sus ciclos.
- El orden de los ciclos ajenos no importa.

Proposición

Toda permutación es producto de biciclos.

Paridad

Proposición

Toda permutación es producto de biciclos.

Demostración.

Basta hacerlo para ciclos, para ello, basta observar que
$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$ ☺

Paridad

- La escritura como producto de biciclos no es única:

$$(1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2) = (1\,2\,3\,4\,5) = (1\,2)(1\,5)(2\,3)(3\,4)(1\,5)(4\,5)$$

Paridad

- La escritura como producto de biciclos no es única:

$$(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(1\ 5)(2\ 3)(3\ 4)(1\ 5)(4\ 5)$$

- Se puede probar (pero es largo) que la paridad del número de biciclos no cambia.

Paridad

- La escritura como producto de biciclos no es única:

$$(1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2) = (1\,2\,3\,4\,5) = (1\,2)(1\,5)(2\,3)(3\,4)(1\,5)(4\,5)$$

- Se puede probar (pero es largo) que la paridad del número de biciclos no cambia.
- La paridad del número de biciclos (en cualquier escritura) será la *paridad* de la permutación.

Paridad

- La escritura como producto de biciclos no es única:

$$(1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2) = (1\,2\,3\,4\,5) = (1\,2)(1\,5)(2\,3)(3\,4)(1\,5)(4\,5)$$

- Se puede probar (pero es largo) que la paridad del número de biciclos no cambia.
- La paridad del número de biciclos (en cualquier escritura) será la *paridad* de la permutación.
- Un r-ciclo es par si y sólo si r es impar.

Paridad

- (1) es una permutación par.

Paridad

- (1) es una permutación par.
- $\sigma = (4\ 1)(7\ 3\ 5)(8\ 6\ 2)$ es impar pero $\Theta(\sigma) = (4, 1, 7, 3, 5, 8, 6, 2) = (5)(8\ 2\ 1\ 4\ 3\ 7\ 6)$ es par.

Paridad

- (1) es una permutación par.
- $\sigma = (4\ 1)(7\ 3\ 5)(8\ 6\ 2)$ es impar pero
  $\Theta(\sigma) = (4, 1, 7, 3, 5, 8, 6, 2) = (5)(8\ 2\ 1\ 4\ 3\ 7\ 6)$ es par.
- Si $n \geq 2$ hay tantas permutaciones pares como impares en S_n.

Regalos

Problema

A una fiesta asisten n personas. Cada una lleva un regalo, se juntan todos los regalos y se sortean de manera que a cada persona le toque uno de los regalos. ¿A cuántas personas se espera que les toque su propio regalo?.

Regalos

Un ejemplo

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.Antes de obtener la solución hagamos un ejemplo con $n = 4$:

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.Antes de obtener la solución hagamos un ejemplo con $n = 4$:

El total de puntos fijos son:

$$1\binom{4}{1}(2)$$

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.Antes de obtener la solución hagamos un ejemplo con $n = 4$:

El total de puntos fijos son:

$$1\binom{4}{1}(2) + 2\binom{4}{2}$$

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.Antes de obtener la solución hagamos un ejemplo con $n = 4$:
El total de puntos fijos son:

$$1\binom{4}{1}(2) + 2\binom{4}{2} + 4(1)$$

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.Antes de obtener la solución hagamos un ejemplo con $n = 4$:

El total de puntos fijos son:

$$1\binom{4}{1}(2) + 2\binom{4}{2} + 4(1) = 24 = 4!$$

Regalos

Un ejemplo

Observemos que el problema se reduce a encontrar el promedio de puntos fijos.Antes de obtener la solución hagamos un ejemplo con $n = 4$:

El total de puntos fijos son:

$$1\binom{4}{1}(2) + 2\binom{4}{2} + 4(1) = 24 = 4!$$

Así que el promedio de puntos fijos es 1.

Regalos

Solución

Veamos que cada $i \in [n]$ es punto fijo en $(n-1)!$ permutaciones.

Regalos

Solución

Veamos que cada $i \in [n]$ es punto fijo en $(n-1)!$ permutaciones. Sumando sobre todas las n tenemos que el número de puntos fijos es:

Regalos

Solución

Veamos que cada $i \in [n]$ es punto fijo en $(n-1)!$ permutaciones. Sumando sobre todas las n tenemos que el número de puntos fijos es:

$$\sum_{i=1}^{n}(n-1)! = n(n-1)! = n!$$

Regalos

Solución

Veamos que cada $i \in [n]$ es punto fijo en $(n-1)!$ permutaciones. Sumando sobre todas las n tenemos que el número de puntos fijos es:

$$\sum_{i=1}^{n}(n-1)! = n(n-1)! = n!$$

Así que el promedio de puntos fijos es 1.

Saltos de longitud

Problema

Un grupo de n jóvenes compite cada día en saltos de longitud. Nunca se repiten las distancias que logran (es decir, no hay empates). En un día promedio ¿Cuantas veces se rompe el récord de ese mismo día?

Saltos de longitud

Solución

Observemos que la longitud de los saltos no importa, sino la comparación entre ellos.

Saltos de longitud

Solución

Observemos que la longitud de los saltos no importa, sino la comparación entre ellos. Podemos pensar entonces que cada día los saltos constituyen una permutación $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de $[n]$.

Saltos de longitud

Solución

Observemos que la longitud de los saltos no importa, sino la comparación entre ellos. Podemos pensar entonces que cada día los saltos constituyen una permutación $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de $[n]$. Queremos contar el promedio de cuántas a_i son mayores que todas las a_j que le preceden.

Usando la transformación Θ (de hecho, Θ^{-1}) el problema equivale a contar el promedio de número de ciclos en las permutaciones de $[n]$.

Saltos de longitud

Solución

Usando la transformación Θ (de hecho, Θ^{-1}) el problema equivale a contar el promedio de número de ciclos en las permutaciones de $[n]$.

Es fácil probar por inducción sobre n que este promedio es:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera.

El avión

Problema

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera. Cuando el último pasajero entra al avión, va al siento que le corresponde y, si lo encuentra ocupado, le pide al pasajero que está en su asiento que se mueva;

El avión

Problema

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera. Cuando el último pasajero entra al avión, va al siento que le corresponde y, si lo encuentra ocupado, le pide al pasajero que está en su asiento que se mueva; en ese caso, el pasajero que dejó el asiento hace lo mismo y así sucesivamente hasta que todos están sentados.

El avión

Problema

Se vendieron todos los boletos (n) para un viaje en avión. Los pasajeros no se dan cuenta que tienen un asiento asignado y se sientan todos, menos el último en llegar, en un asiento desocupado cualquiera. Cuando el último pasajero entra al avión, va al siento que le corresponde y, si lo encuentra ocupado, le pide al pasajero que está en su asiento que se mueva; en ese caso, el pasajero que dejó el asiento hace lo mismo y así sucesivamente hasta que todos están sentados. ¿Cuál es la probabilidad de que un determinado pasajero (no el último en llegar) tenga que cambiar su asiento?

El avión

Solución

Numeremos las personas y las sillas de tal manera que la persona i tenga asignada la silla i y que la persona n sea la última en llegar.

El avión

Solución

Numeremos las personas y las sillas de tal manera que la persona i tenga asignada la silla i y que la persona n sea la última en llegar. Sea $\sigma : [n] \to [n]$ la permutación que asigna a i la persona que se sienta al azar en la silla i; si i es asiento vacío, entonces $\sigma(i) = n$.

El avión

Solución

Es claro que la persona sentada en el asiento i se moverá si y sólo si i está en el mismo ciclo que n.

El avión

Solución

Es claro que la persona sentada en el asiento i se moverá si y sólo si i está en el mismo ciclo que n.Usando la biyección $\Theta : S_n \to S_n$ se ve que los elementos que quedan en el mismo ciclo que n son aquellos que están a su derecha en la forma lineal, por lo tanto, la probabilidad de moverse es $\frac{1}{2}$.

El Juego del 15

¿Qué es?

El Juego del 15

¿Qué es?

El Juego del 15

¿Qué es?

El Juego del 15

¿Qué cosas se pueden?

Sam Loyd

El Juego del 15

¿Qué cosas se pueden?

Sam Loyd

Actualidad

Proposición

Si un arreglo de números en El Juego del 15 se puede resolver, entonces la permutación inducida es par.

Observemos que cada movimiento válido corresponde a multiplicar por un biciclo la permutación inducida:

El Juego del 15

Demostración

Observemos que cada movimiento válido corresponde a multiplicar por un biciclo la permutación inducida:

σ

El Juego del 15

Demostración

Observemos que cada movimiento válido corresponde a multiplicar por un biciclo la permutación inducida:

σ

$(16\ 13)\sigma$

El Juego del 15

Demostración

Coloreando el juego como ajedrez:

El Juego del 15

Demostración

Coloreando el juego como ajedrez:

El Juego del 15

Demostración

Coloreando el juego como ajedrez:

Cada movimiento cambia el color del cuadro vacío.

El Juego del 15

Demostración

Ya que el cuadrado vacío inicia y termina "blanco" debe haber un número par de movimientos.

Por lo tanto, la permutación con la que iniciamos debe ser par. ☺

¡GRACIAS!

Presentación en:

http://fismat.umich.mx/ ∼ jamontero/congresoSMM_11.pdf