

Toros cuadriculados muy simétricos

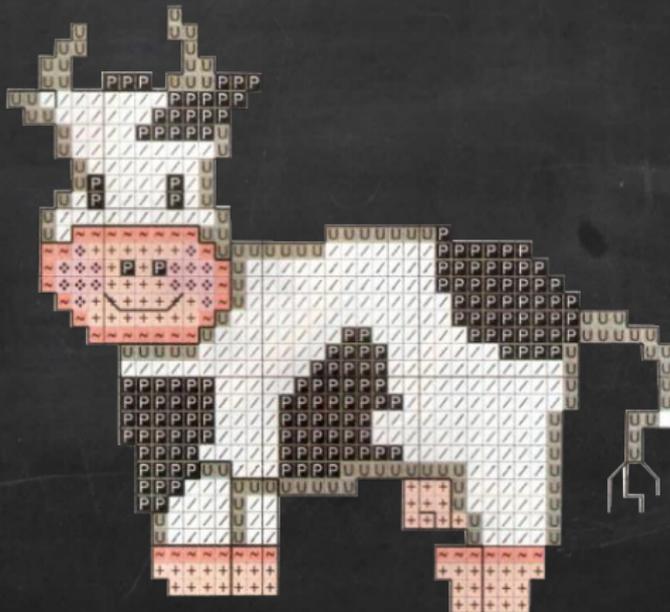
Antonio Montero

Trabajo conjunto con José Collins

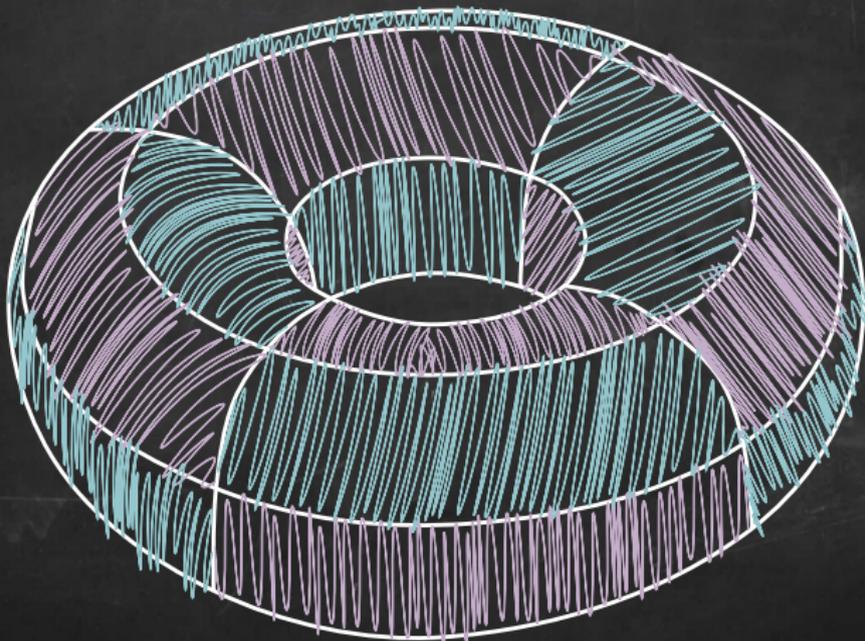
Instituto de Matemáticas - UNAM CU

Encuentro Nororiental de Matemáticas 2020
Universidad de Pamplona
Noviembre 2020

Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Cuadrículas

¿Qué son?

* Vértices (puntos de coordenadas enteras)

Cuadrículas

¿Qué son?

- * Vértices (puntos de coordenadas enteras)
- * Aristas (segmentos que conectan dos vértices con diferencia e_j)

Cuadrículas

¿Qué son?

- * Vértices (puntos de coordenadas enteras)
- * Aristas (segmentos que conectan dos vertices con diferencia e_j)
- * Cuadrados (2-dimensionales dejando variar dos coordenadas a partir de un vértice)

Cuadrículas

¿Qué son?

- * Vértices (puntos de coordenadas enteras)
- * Aristas (segmentos que conectan dos vértices con diferencia e_j)
- * Cuadrados (2-dimensionales dejando variar dos coordenadas a partir de un vértice)
- * Cubos (3-dimensionales, 3 coordenadas),

Cuadrículas

¿Qué son?

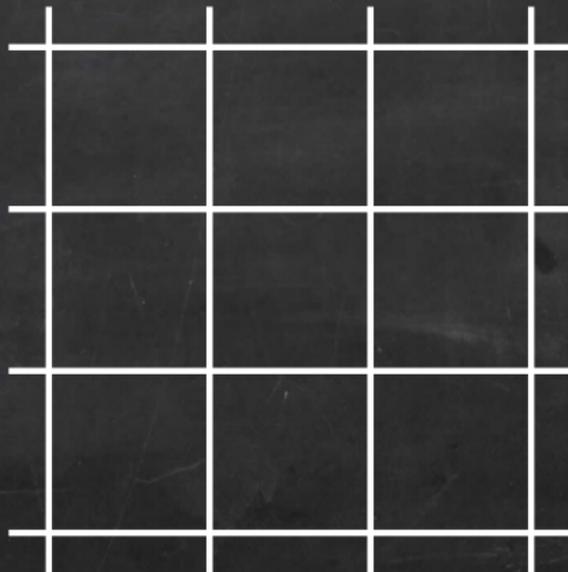
- * Vértices (puntos de coordenadas enteras)
- * Aristas (segmentos que conectan dos vértices con diferencia e_j)
- * Cuadrados (2-dimensionales dejando variar dos coordenadas a partir de un vértice)
- * Cubos (3-dimensionales, 3 coordenadas),
- * Hipercubos (4-dimensionales, 4 coordenadas),

Cuadrículas

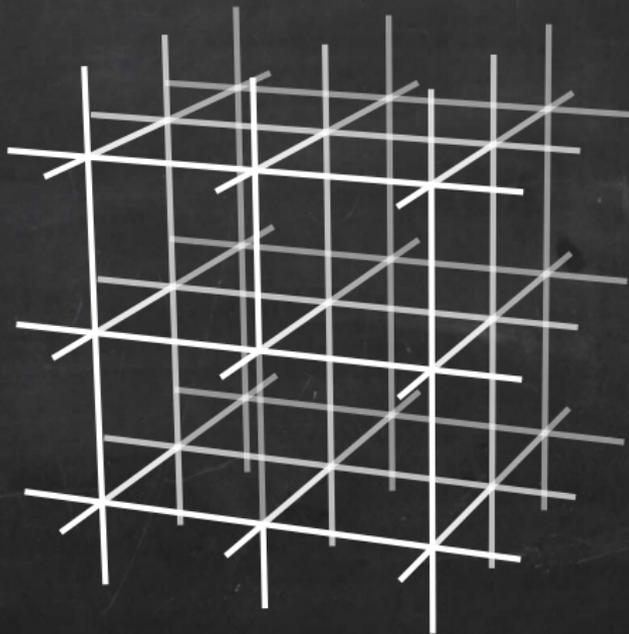
¿Qué son?

- * Vértices (puntos de coordenadas enteras)
- * Aristas (segmentos que conectan dos vertices con diferencia e_j)
- * Cuadrados (2-dimensionales dejando variar dos coordenadas a partir de un vértice)
- * Cubos (3-dimensionales, 3 coordenadas),
- * Hipercubos (4-dimensionales, 4 coordenadas),
- * ...

Cuadrículas



Cuadrículas



Cuadrículas

Simetrías

Una **simetría** de una cuadrícula C es una isometría del espacio que preserva a C globalmente.

Cuadrículas

Simetrías

Una **simetría** de una cuadrícula C es una **isometría** del espacio que preserva a C globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

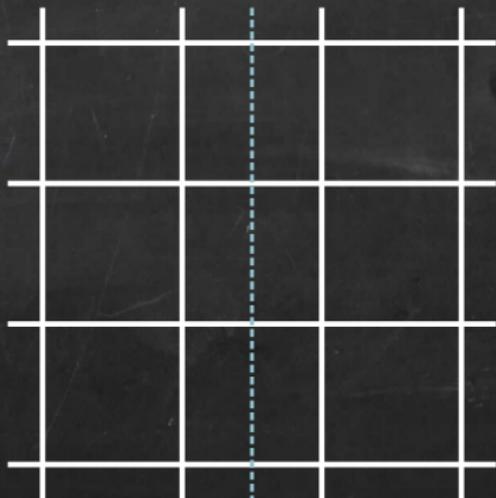
Una **simetría** de una cuadrícula C es una **isometría** del espacio que preserva a C globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

Una **simetría** de una cuadrícula C es una **isometría** del espacio que preserva a C globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

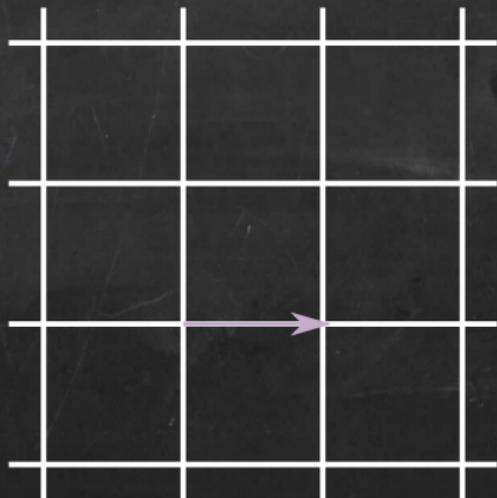
Una **simetría** de una cuadrícula C es una **isometría** del espacio que preserva a C globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

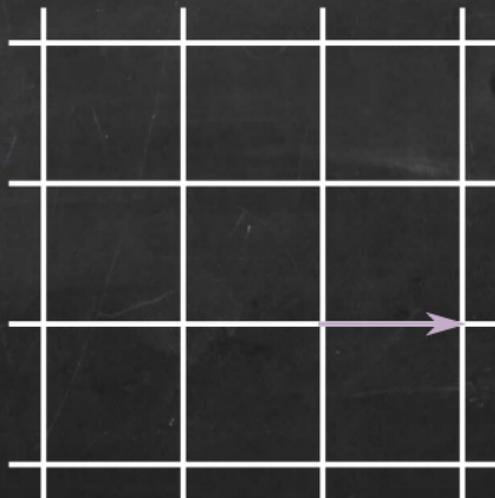
Una **simetría** de una cuadrícula C es una **isometría** del espacio que preserva a C globalmente.



Cuadrículas

Simetrías

Una **simetría** de una cuadrícula C es una **isometría** del espacio que preserva a C globalmente.

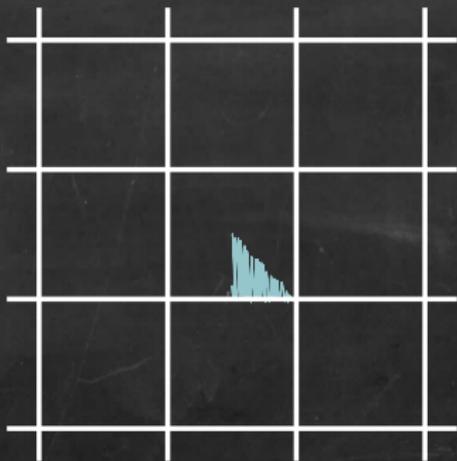


Cuadrículas

Una **Bandera** de una cuadrícula es una sucesión (F_0, F_1, \dots, F_n) de elementos mutuamente incidentes, con $\dim(F_i) = i$.

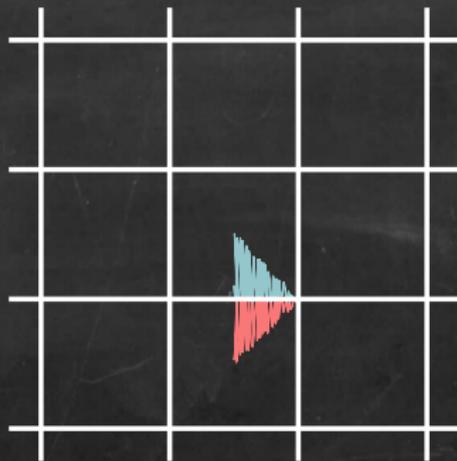
Cuadrículas

Una **Bandera** de una cuadrícula es una sucesión (F_0, F_1, \dots, F_n) de elementos mutuamente incidentes, con $\dim(F_i) = i$.



Cuadrículas

Una **Bandera** de una cuadrícula es una sucesión (F_0, F_1, \dots, F_n) de elementos mutuamente incidentes, con $\dim(F_i) = i$.



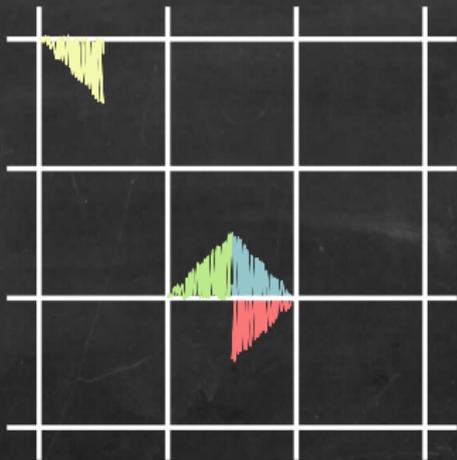
Cuadrículas

Una **Bandera** de una cuadrícula es una sucesión (F_0, F_1, \dots, F_n) de elementos mutuamente incidentes, con $\dim(F_i) = i$.



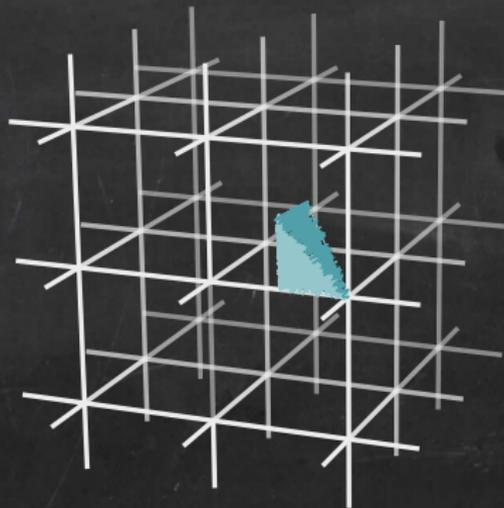
Cuadrículas

Una **Bandera** de una cuadrícula es una sucesión (F_0, F_1, \dots, F_n) de elementos mutuamente incidentes, con $\dim(F_i) = i$.



Cuadrículas

Una **Bandera** de una cuadrícula es una sucesión (F_0, F_1, \dots, F_n) de elementos mutuamente incidentes, con $\dim(F_i) = i$.



Cuadrículas

Simetrías

- * El grupo de simetrías de una cuadrícula \mathcal{C} , denotado por $\Gamma(\mathcal{C})$ es el conjunto de todas las simetrías de \mathcal{C} con la composición (como operación).

Cuadrículas

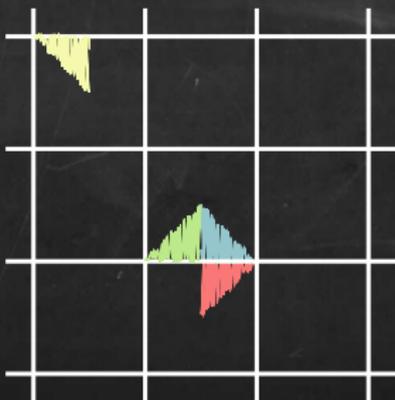
Simetrías

- * El grupo de simetrías de una cuadrícula C , denotado por $\Gamma(C)$ es el conjunto de todas las simetrías de C con la composición (como operación).
- * La imagen de una bandera determina a lo más una simetría.

Cuadrículas

Simetrías

- * El grupo de simetrías de una cuadrícula C , denotado por $\Gamma(C)$ es el conjunto de todas las simetrías de C con la composición (como operación).
- * La imagen de una bandera determina a lo más una simetría.



Las cuadrículas son re simétricas

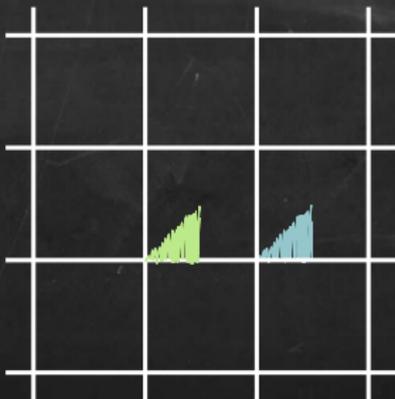
- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.

Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.

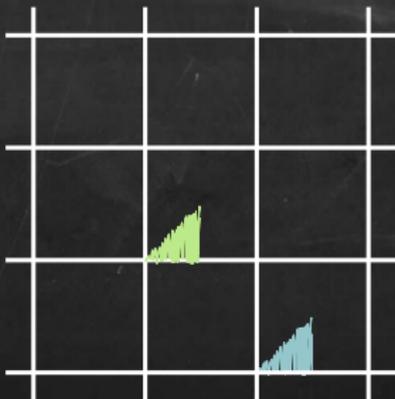
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



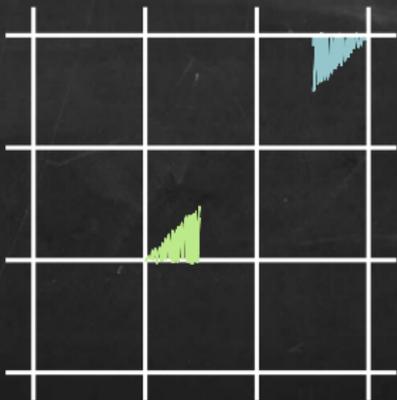
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



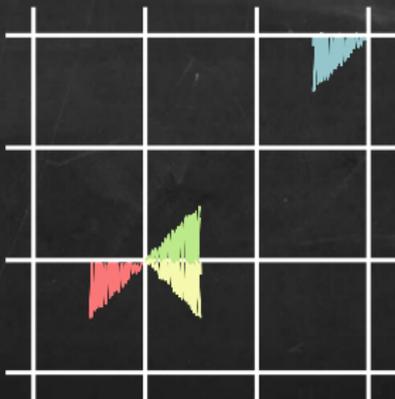
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



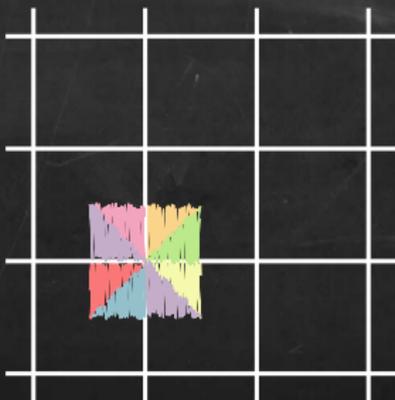
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



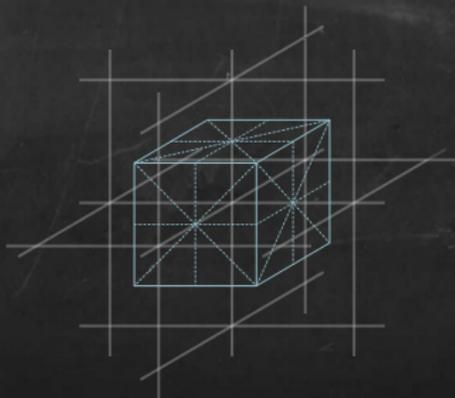
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



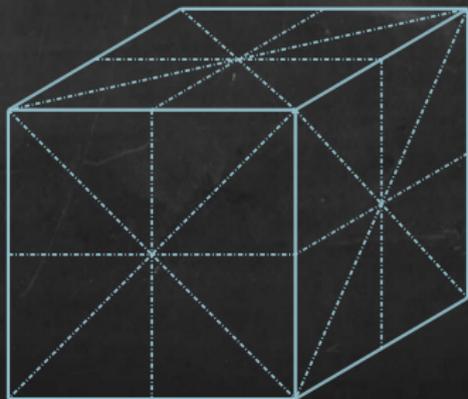
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 Órbita en Banderas o que C es regular.



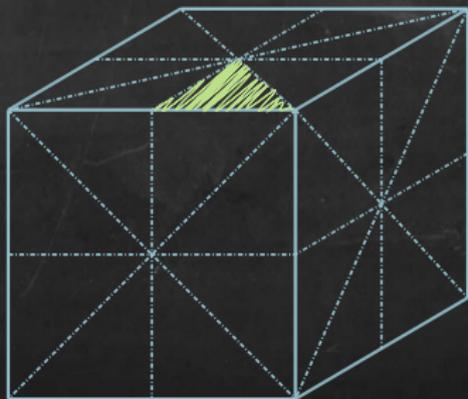
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



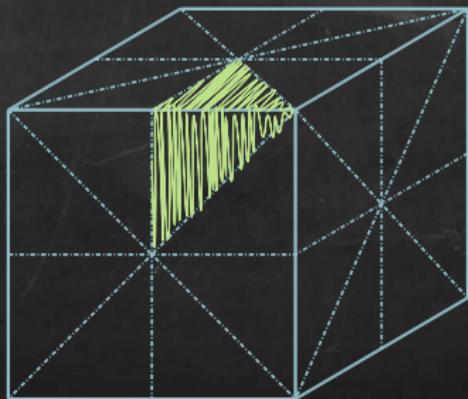
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



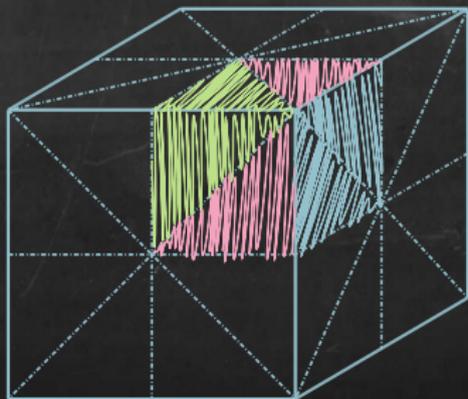
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 Órbita en Banderas o que C es regular.



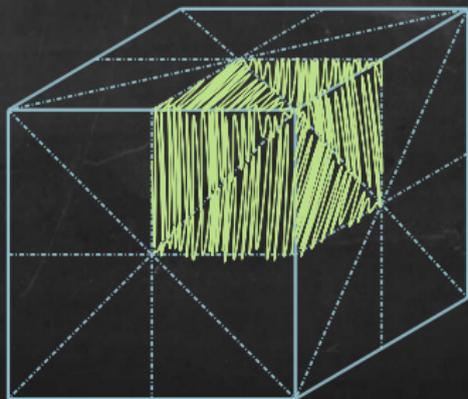
Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 órbita en banderas o que C es regular.



Las cuadrículas son re simétricas

- * Dadas dos banderas, existe una simetría de C que manda una en la otra.
- * Cuando esto sucede decimos que C tiene 1 Órbita en Banderas o que C es regular.



Cuadrículas Regulares

- * El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.

Cuadrículas Regulares

- * El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
- * En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(C)$ tengamos:
 - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)

Cuadrículas Regulares

- * El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
- * En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(C)$ tengamos:
 - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
 - Simetrías que permutan las coordenadas.

Cuadrículas Regulares

- * El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
- * En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(C)$ tengamos:
 - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
 - Simetrías que permutan las coordenadas.
 - Simetrías que cambian de signo en una coordenada.

Cuadrículas Regulares

- * El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
- * En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(C)$ tengamos:
 - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
 - Simetrías que permutan las coordenadas.
 - Simetrías que cambian de signo en una coordenada.

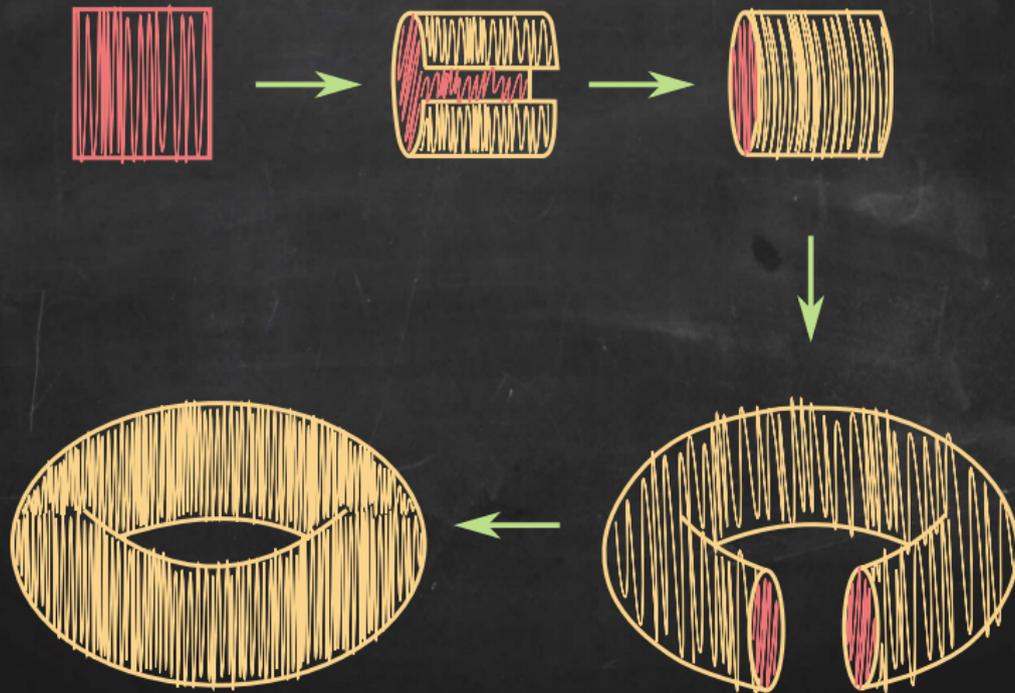
¡Y todo eso lo tenemos con la cuadrícula de \mathbb{E}^n !

Cuadrículas Regulares

- * El mismo truco funciona en dimensiones más altas, aunque no tengamos dibujito.
- * En realidad lo único que necesitamos es que en $\Gamma(C)$ tengamos:
 - Traslaciones (para concentrarnos únicamente en un vértice)
 - Simetrías que permutan las coordenadas.
 - Simetrías que cambian de signo en una coordenada.

¡Y todo eso lo tenemos con la cuadrícula de \mathbb{E}^n !
... de hecho, estas simetrías **generan** a $\Gamma(C)$.

El toro



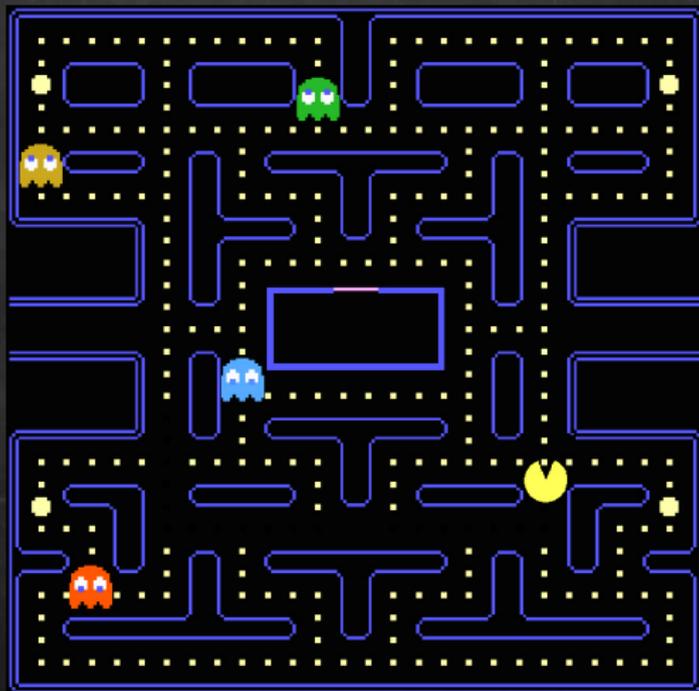
Toro (IM-UNAM)

Toros cuadriculados muy simétricos

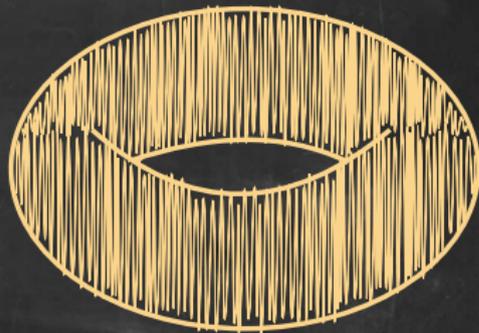
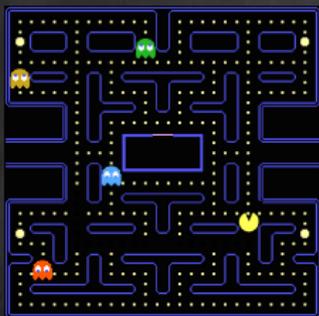
ENM - UniPamplona

10/1

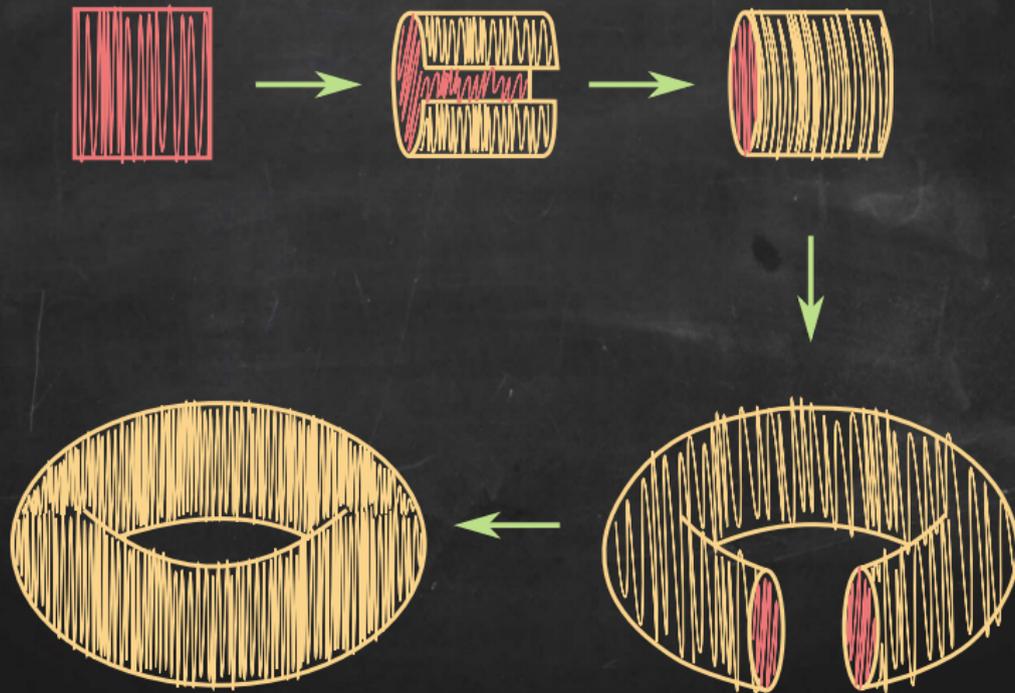
El toro



El toro



El toro



Toro (IM-UNAM)

Toros cuadriculados muy simétricos

ENM - UniPamplona

10/1

El toro



El toro



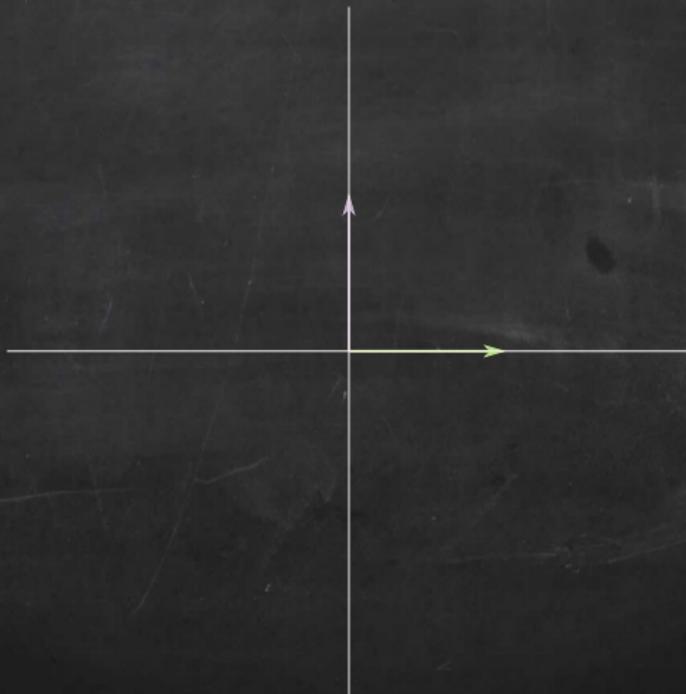
El toro



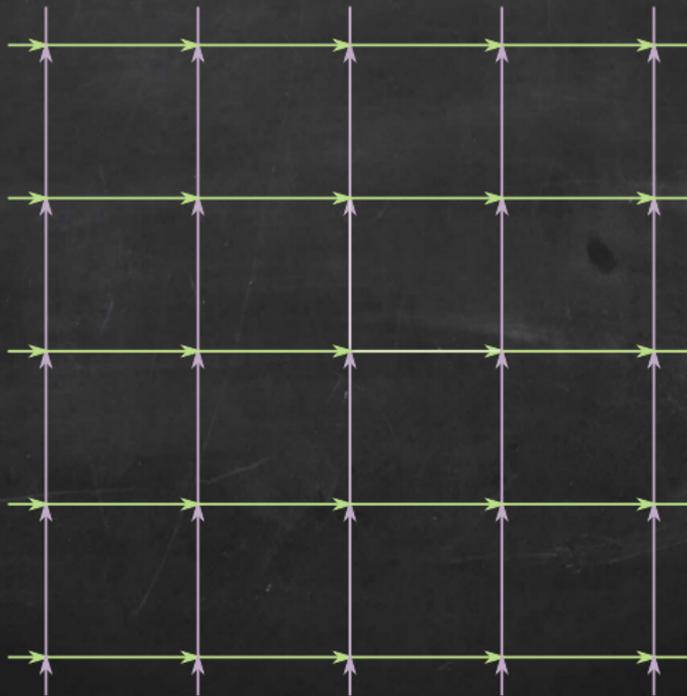
El toro



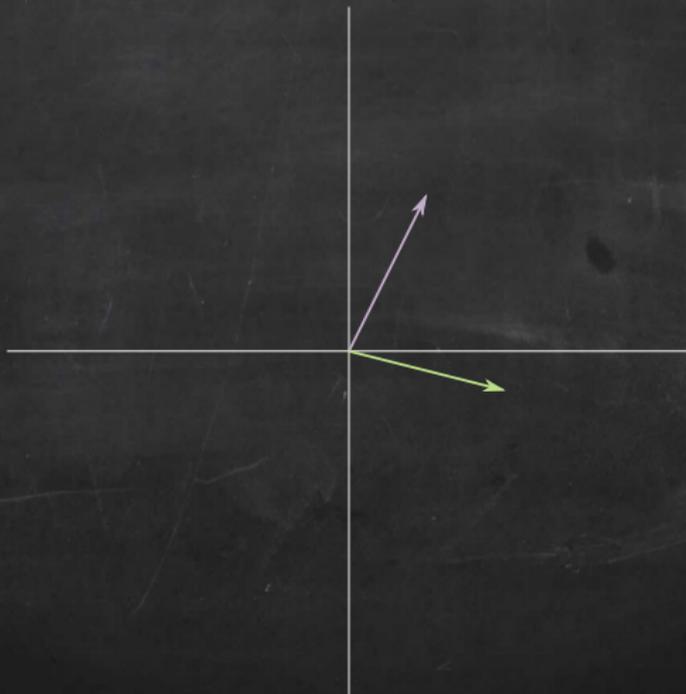
El toro



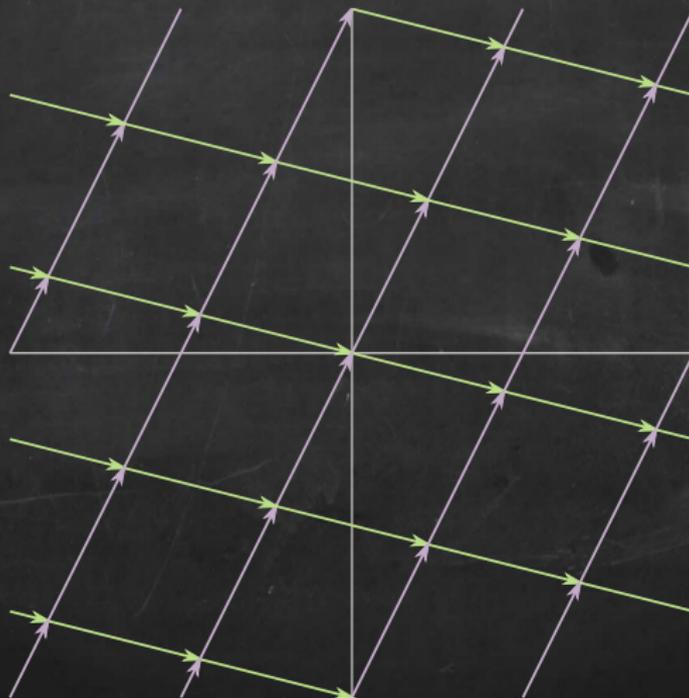
El toro



El toro



El toro



El toro

Observación

El **toro 2-dimensional** es el espacio que resulta al identificar los puntos de \mathbb{E}^2 mediante 2 **traslaciones linealmente independientes**.

El toro

Observación

El **toro 2-dimensional** es el espacio que resulta al identificar los puntos de \mathbb{E}^2 mediante 2 **traslaciones linealmente independientes**.

Definición

El **toro n -dimensional** es el espacio que resulta al identificar los puntos de \mathbb{E}^n mediante n **traslaciones linealmente independientes**.

Toros cuadriculados

¿Dónde vamos?

* Ya hablamos de cuadrículas en \mathbb{E}^n .

Toros cuadriculados

¿Dónde vamos?

- * Ya hablamos de cuadrículas en \mathbb{E}^n .
- * Ya sabemos como obtener el n -toro pegando puntos de \mathbb{E}^n .

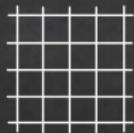
Toros cuadriculados

¿Dónde vamos?

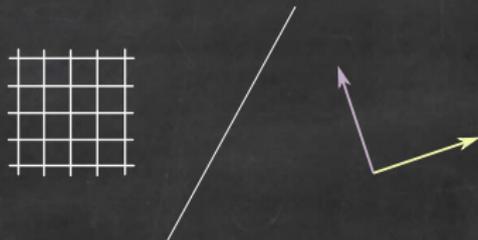
- * Ya hablamos de cuadrículas en \mathbb{E}^n .
- * Ya sabemos como obtener el n -toro pegando puntos de \mathbb{E}^n .

¡Juntar ambas cosas es **facilísimo!**

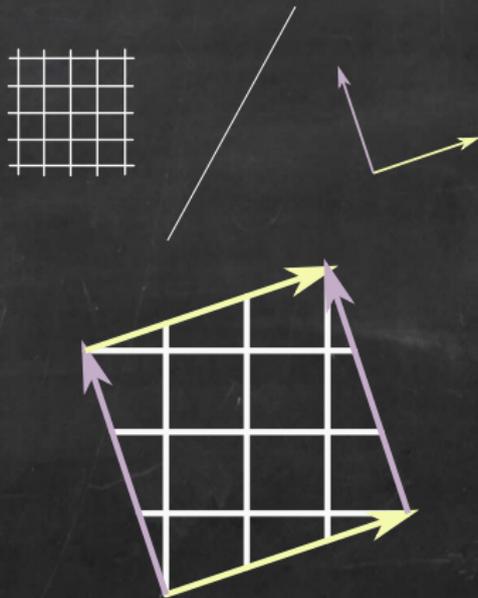
Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Toros cuadriculados

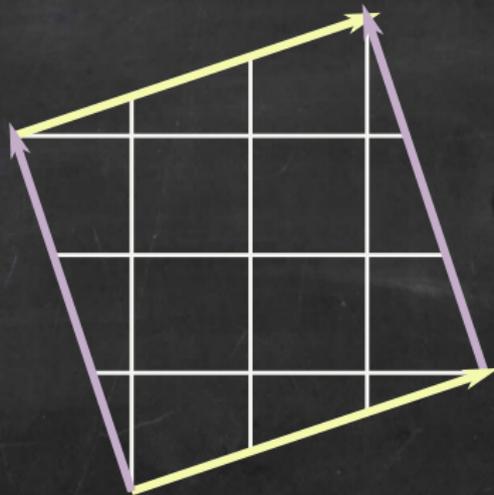
¿Qué pasa con las simetrías?

Toros cuadriculados

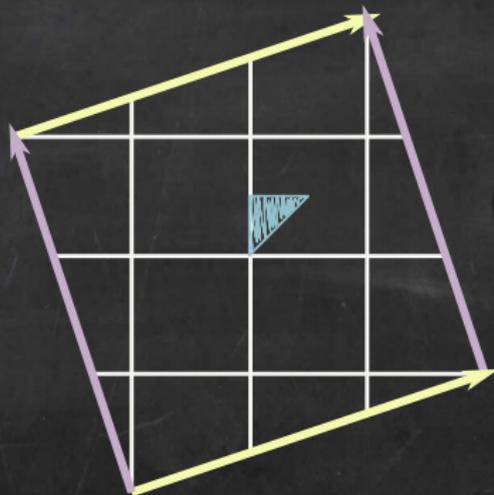
¿Qué pasa con las simetrías?

¿Será que todos los toros cuadriculados son regulares?

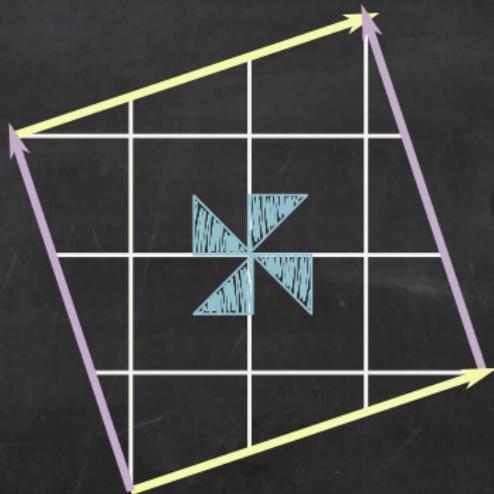
Toros cuadriculados



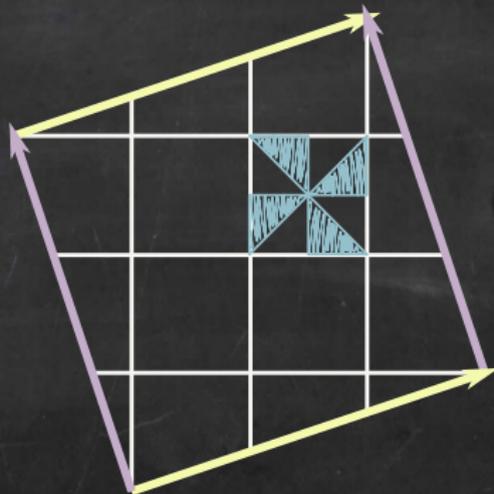
Toros cuadriculados



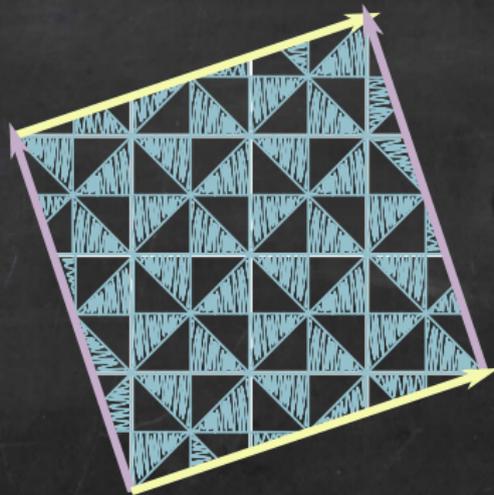
Toros cuadriculados



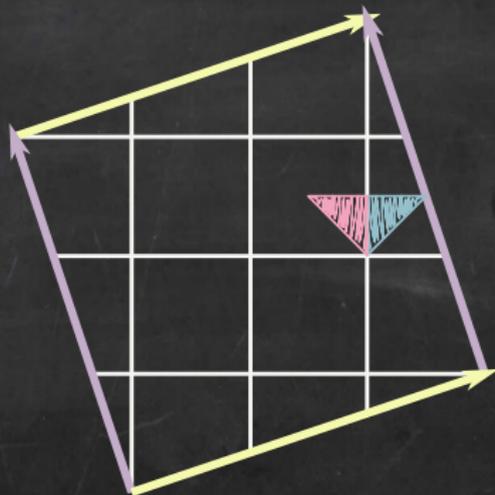
Toros cuadriculados



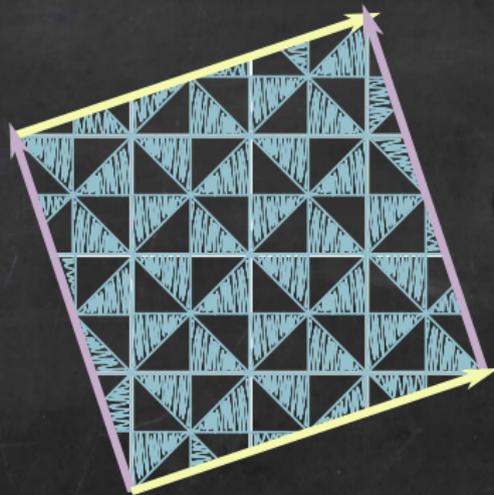
Toros cuadriculados



Toros cuadriculados



Toros cuadriculados

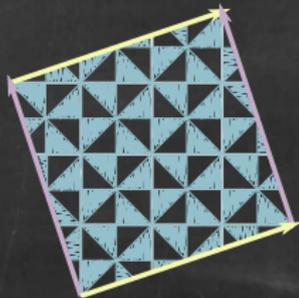


Toros cuadriculados

* Un toro cuadrulado como éste 2 órbitas en Banderas.

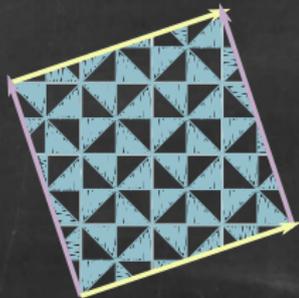
Toros cuadriculados

* Un toro cuadrulado como éste 2 órbitas en Banderas.



Toros cuadriculados

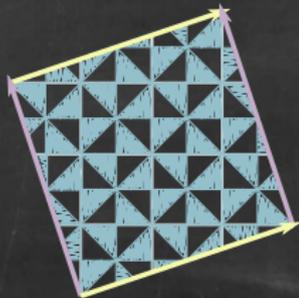
* Un toro cuadrulado como éste 2 órbitas en Banderas.



* Hay otros toros con 2 órbitas que se ven distinto:

Toros cuadriculados

* Un toro cuadrulado como éste 2 órbitas en Banderas.

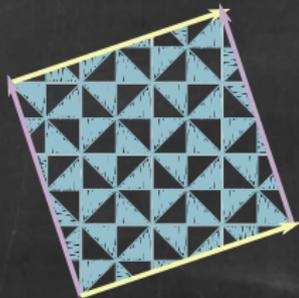


* Hay otros toros con 2 órbitas que se ven distinto:

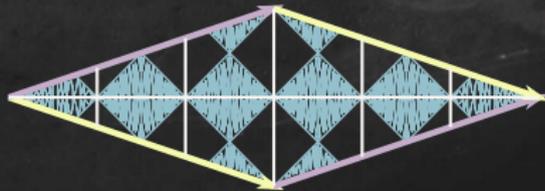
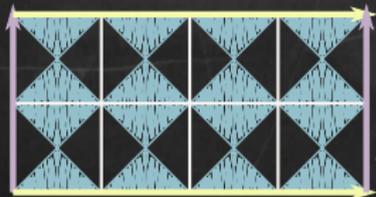


Toros cuadriculados

* Un toro cuadrículado como éste 2 órbitas en Banderas.



* Hay otros toros con 2 órbitas que se ven distinto:



Toros cuadriculados

* ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados hasta tipo de simetría?

Toros cuadriculados

- * ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados hasta tipo de simetría?
 - ¿Cuántas órbitas tienen?

Toros cuadriculados

- * ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados hasta tipo de simetría?
 - ¿Cuántas órbitas tienen?
 - ¿Cómo se acomodan las órbitas?

Toros cuadriculados

* ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados hasta tipo de simetría?

- ¿Cuántas órbitas tienen?
- ¿Cómo se acomodan las órbitas?

* ¡Sí!

Toros cuadriculados

- * ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados hasta tipo de simetría?
 - ¿Cuántas órbitas tienen?
 - ¿Cómo se acomodan las órbitas?

* ¡Sí!

Bueno, más o menos...

Toros cuadriculados

* $n = 2$

Toros cuadriculados

* $n = 2$

- Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 70's.

Toros cuadriculados

* $n = 2$

- Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 70's.
- Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).

Toros cuadriculados

* $n = 2$

- Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 70's.
- Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).
- Brehm y Kühnel completaron la clasificación por primera vez (2008).

Toros cuadriculados

* $n = 2$

- Coxeter estudió las regulares y las quirales en los 70's.
- Duarte extendió la clasificación para 2 órbitas (2007).
- Brehem y Kühnel completaron la clasificación por primera vez (2008).
- Hubbard, Orbanic, Pellicer y Weiss obtienen de nuevo esta clasificación (2012).

Toros cuadriculados

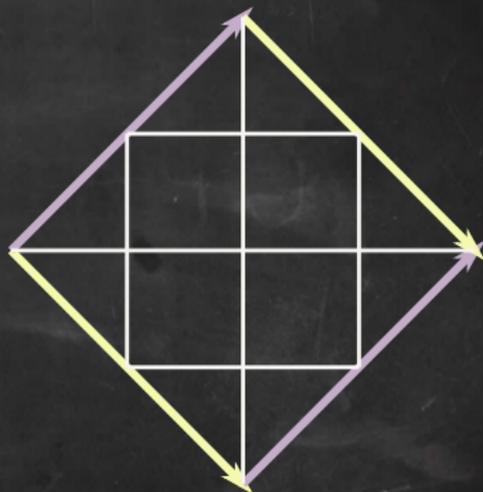
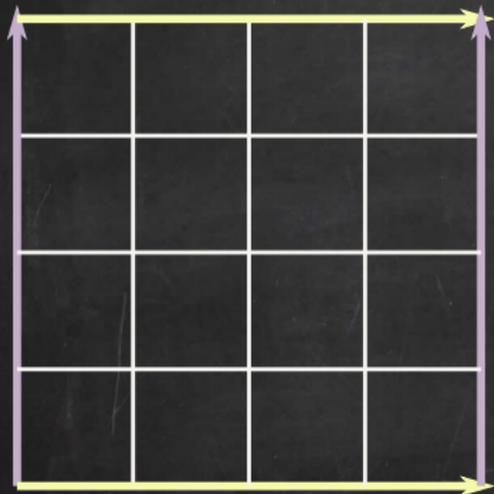


Figura: $\langle (s, 0), (0, s) \rangle$ o $\langle (s, s), (s, -s) \rangle$

Toros cuadriculados

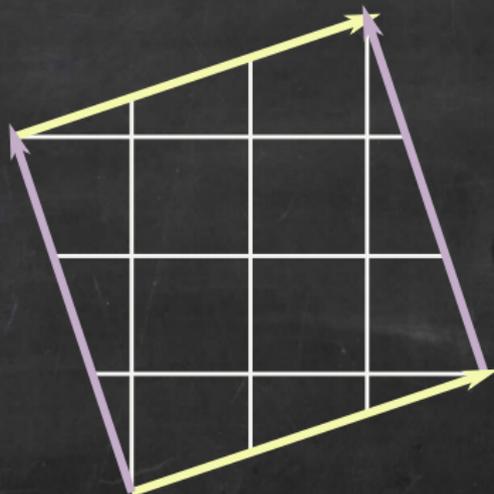


Figura: $\langle (s, t), (-t, s) \rangle$ con $st(s - t) \neq 0$

Toros cuadriculados

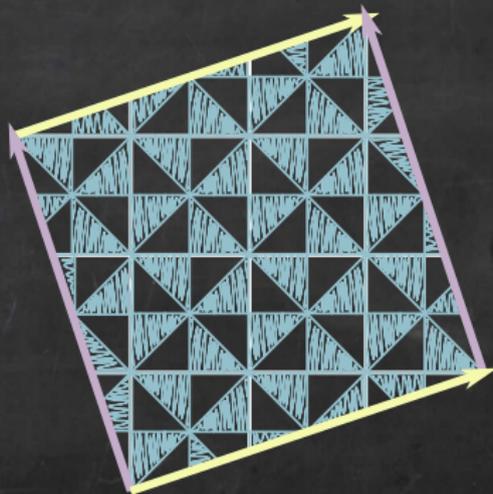


Figura: $\langle (s, t), (-t, s) \rangle$ con $st(s - t) \neq 0$

Toros cuadriculados

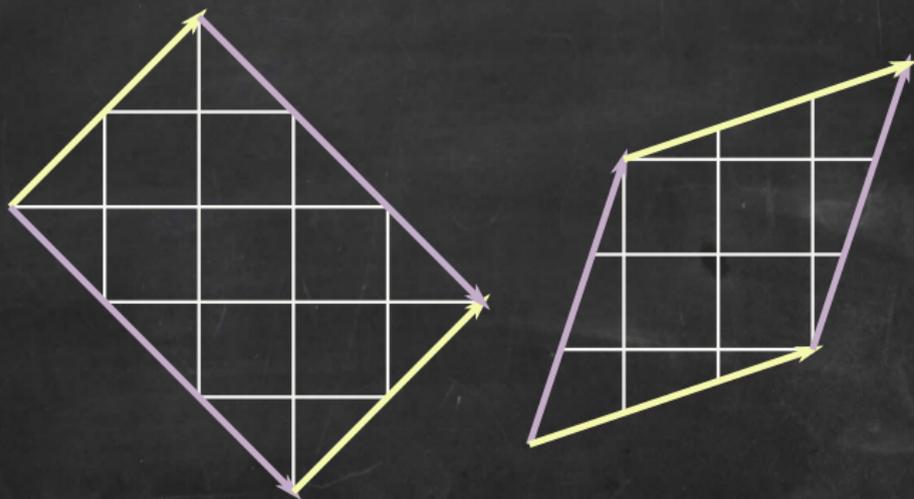


Figura: $\langle (s, s), (t, t) \rangle$ o $\langle (s, t), (t, s) \rangle$

Toros cuadriculados

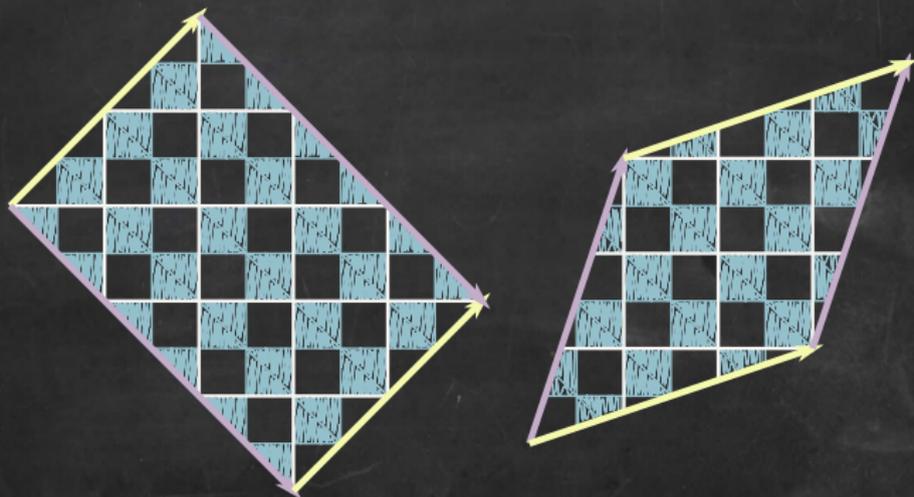


Figura: $\langle (s, s), (t, t) \rangle$ o $\langle (s, t), (t, s) \rangle$

Toros cuadriculados

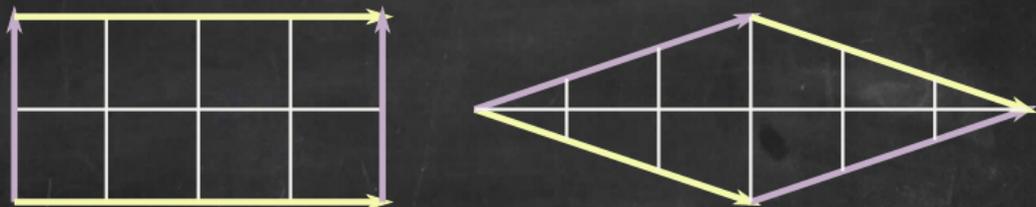


Figura: $\langle (s, 0), (t, 0) \rangle$ o $\langle (s, t), (s, -t) \rangle$

Toros cuadriculados

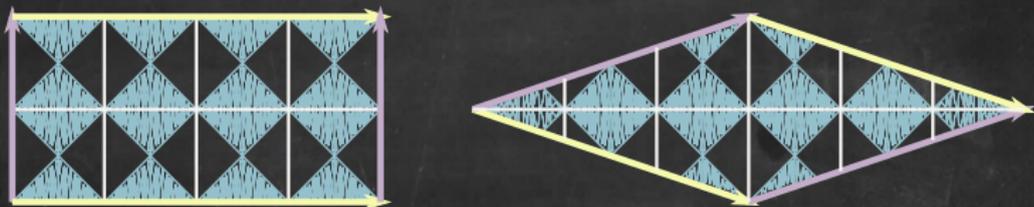


Figura: $\langle (s, 0), (t, 0) \rangle$ o $\langle (s, t), (s, -t) \rangle$

Toros cuadriculados

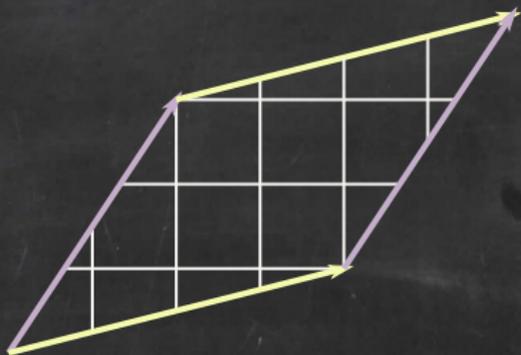


Figura: Cualquier otro $\langle\langle(4, 1), (2, 3)\rangle\rangle$

Toros cuadriculados

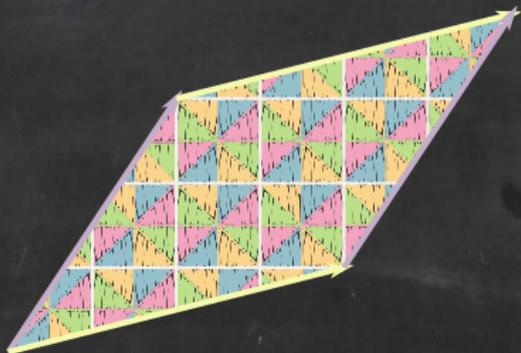


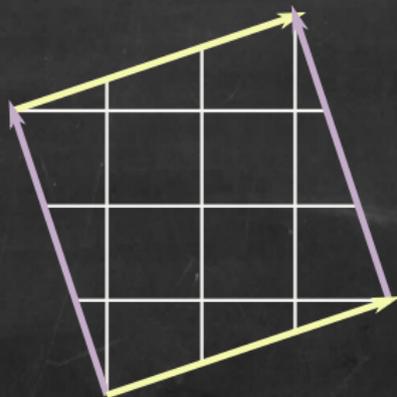
Figura: Cualquier otro $\langle\langle(4, 1), (2, 3)\rangle\rangle$

Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?

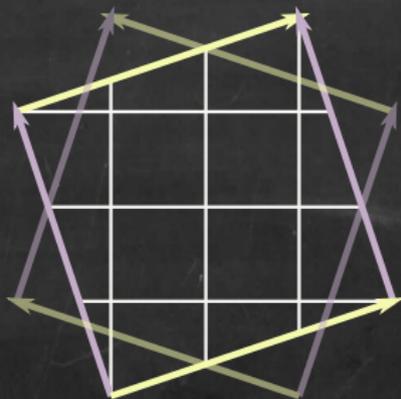
Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?



Toros cuadriculados

¿Qué salió mal?



La simetría que queríamos no respeta el pegado.

Toros cuadriculados

- * Entonces... determinar cuáles simetrías de C respetan el pegado determina el tipo de simetría del toro cuadriculado.

Toros cuadriculados

- * Entonces... determinar cuáles simetrías de \mathcal{C} respetan el pegado determina el tipo de simetría del toro cuadriculado.
- * Nos deberíamos concentrar en los generadores de $\Gamma(\mathcal{C})$: traslaciones, permutaciones de coordenadas, cambios de signo.

Toros cuadriculados

- * Entonces... determinar cuáles simetrías de \mathcal{C} respetan el pegado determina el **tipo de simetría** del toro cuadriculado.
- * Nos deberíamos concentrar en los generadores de $\Gamma(\mathcal{C})$: **traslaciones**, permutaciones de coordenadas, **cambios de signo**.
- * Las **traslaciones** funcionan bien: si x y y se pegan, $x + u$ y $y + u$ se pegan.

Toros cuadriculados

- * Entonces... determinar cuáles simetrías de C respetan el pegado determina el **tipo de simetría** del toro cuadriculado.
- * Nos deberíamos concentrar en los generadores de $\Gamma(C)$: **traslaciones**, permutaciones de coordenadas, **cambios de signo**.
- * Las **traslaciones** funcionan bien: si x y y se pegan, $x + u$ y $y + u$ se pegan.
- * Analizar todas las demás es **muchísimo**, es un número parecido a $2^n n!$.

Toros cuadriculados

* $n = 3$

Toros cuadriculados

* $n = 3$

- Clasificados por Hubbard, Orbanić, Pellicer y Weiss (2012)

Toros cuadriculados

* $n = 3$

- Clasificados por Hubbard, Orbanić, Pellicer y Weiss (2012)

* $n \geq 4$

- P. McMullen y E. Schulte clasificaron los regulares (1996).

Toros cuadriculados

* $n = 3$

- Clasificados por Hubbard, Orbanic, Pellicer y Weiss (2012)

* $n \geq 4$

- P. McMullen y E. Schulte clasificaron los regulares (1996).
- M. Hartley, P. McMullen y E. Schulte: no existen quirales si $n \geq 3$ (1999).

Toros cuadriculados

Corolario (H,O,P,W)

No existen toros cuadriculados tridimensionales con 2 órbitas.

Toros cuadriculados

Corolario (H,O,P,W)

No existen toros cuadriculados tridimensionales con 2 órbitas.

* Si $n \geq 4$ ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados n -dimensionales con 2 órbitas?

Toros cuadriculados

Corolario (H,O,P,W)

No existen toros cuadriculados tridimensionales con 2 órbitas.

- * Si $n \geq 4$ ¿Podemos clasificar los toros cuadriculados n -dimensionales con 2 órbitas?
- * ¿Siquiera existen?

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Definición

Decimos que un toro cuadriculado n -dimensional tiene pocas órbitas si tiene a lo más n órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Definición

Decimos que un toro cuadriculado n -dimensional tiene pocas órbitas si tiene a lo más n órbitas.

- * Los toros cuadriculados regulares y de 2-órbitas son siempre de pocas órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Una familia de 2 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Una familia de 2 órbitas.
- * Una familia de 3 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Los toros cuadriculados 4-dimensionales de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Una familia de 2 órbitas.
- * Una familia de 3 órbitas.
- * Cinco familias de 4 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geq 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geq 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geq 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geq 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.
- * Si n es impar, no existen toros cuadriculados de 2 órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geq 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.
- * Si n es impar, no existen toros cuadriculados de 2 órbitas.
- * Si $2 < k < n$, no existen toros cuadriculados de k órbitas.

Toros cuadriculados...

...de pocas órbitas

Teorema (Collins, M.)

Si $n \geq 5$ los toros cuadriculados de pocas órbitas se clasifican como sigue:

- * Tres familias de regulares.
- * Si n es par, existe una familia de 2 órbitas.
- * Si n es impar, no existen toros cuadriculados de 2 órbitas.
- * Si $2 < k < n$, no existen toros cuadriculados de k órbitas.
- * Para toda n existen cinco familias de toros cuadriculados con n órbitas.

El secreto

El secreto

Geometría	Grupos
Cuadrícula \mathcal{C} en \mathbb{E}^n	$\Gamma(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}^n \rtimes (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$

El secreto

Geometría	Grupos
Cuadrícula \mathcal{C} en \mathbb{E}^n	$\Gamma(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}^n \rtimes (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$
Tipo de simetría de toros cuadrículados	$[K] : K \leq \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$

El secreto

Geometría	Grupos
Cuadrícula \mathcal{C} en \mathbb{E}^n	$\Gamma(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}^n \rtimes (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$
Tipo de simetría de toros cuadrículados	$[K] : K \leq \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$
Número de órbitas en Banderas	$[\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n : K]$

¡Gracias!

