

# De un ejemplo con Gráficas a un problema con toros

Antonio Montero

Centro de Ciencias Matemáticas - UNAM

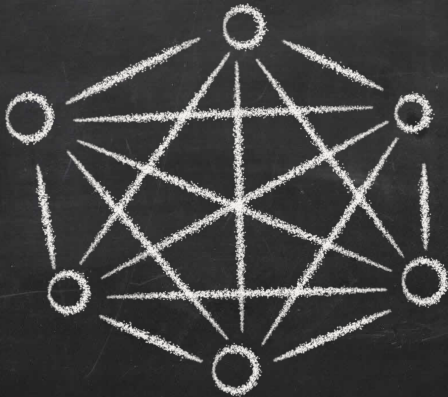
XXXIII Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones  
La Habana, Cuba  
Marzo 2018

Un ejemplito...

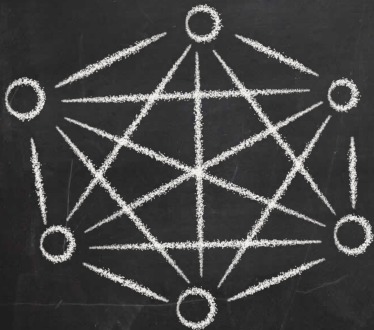
# Un ejemplito...



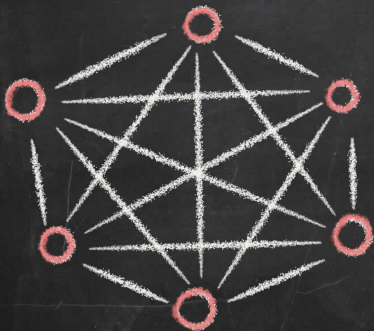
# Un ejemplito...



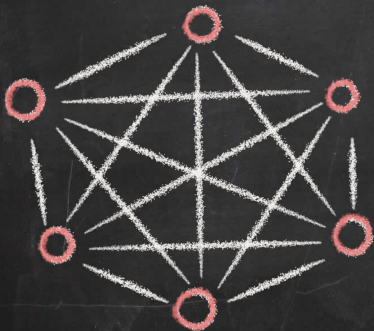
# Un ejemplito...



# Un ejemplito...

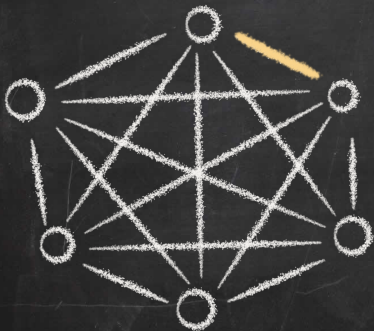


# Un ejemplito...



Vértices (6)

# Un ejemplito...

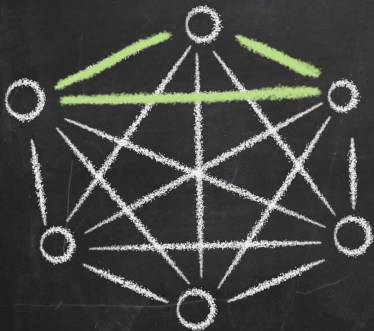


Aristas (15)

Vértices (6)



# Un ejemplito...

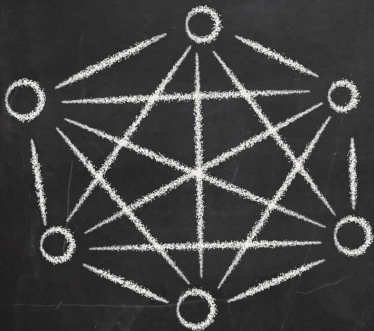


Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



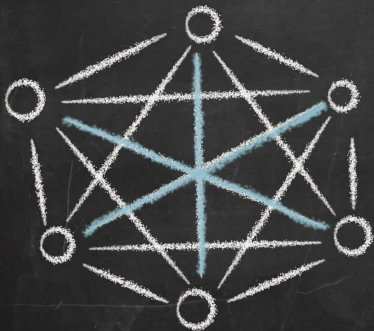
Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



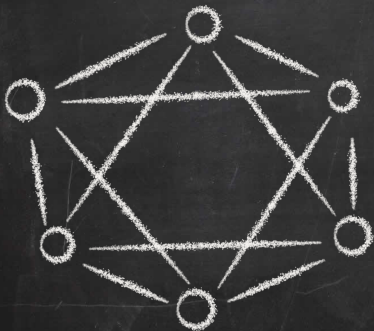
Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



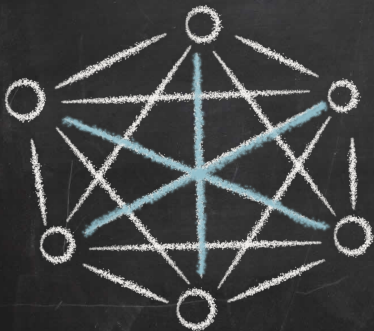
Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



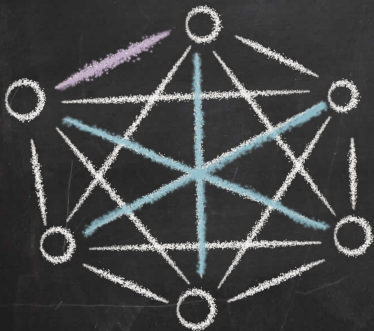
Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)



# Un ejemplito...



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# Un ejemplito...



# Un ejemplito...



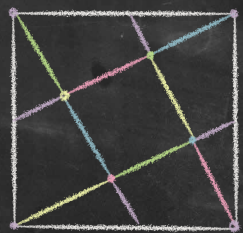
# Un ejemplito...



# Un ejemplito...

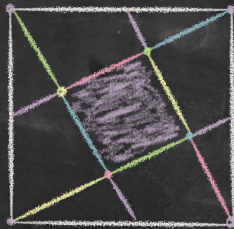


# Un ejemplito...

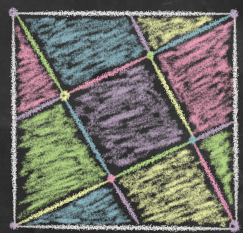




# Un ejemplito...



# Un ejemplito...



# El dual

# El dual



# El dual



Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# El dual

Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# El dual

Vértices (6)

Aristas (15)

Triángulos (20)

Octaedros (5)

Octaedros (5)

Triángulos (20)

Aristas (15)

Vértices (6)

# El dual

Vértices (6)

Aristas (15)

Triángulos (20)

Octaedros (5)



# El dual

Vértices (6)

Aristas (15)

Triángulos (20)

Octaedros (5)  $\longrightarrow$  Vértices (5)

# El dual

Vértices (6)

Aristas (15)

Triángulos (20)  $\longrightarrow$  Aristas (20)

Octaedros (5)  $\longrightarrow$  Vértices (5)

# El dual

Vértices (6)

Aristas (15) →

Triángulos (20) → Aristas (20)

Octaedros (5) → Vértices (5)

# El dual

Vértices (6)

Aristas (15)  $\longrightarrow$  Cuadrados (15)

Triángulos (20)  $\longrightarrow$  Aristas (20)

Octaedros (5)  $\longrightarrow$  Vértices (5)

# El dual

Vértices (6)  $\longrightarrow$

Aristas (15)  $\longrightarrow$  Cuadrados (15)

Triángulos (20)  $\longrightarrow$  Aristas (20)

Octaedros (5)  $\longrightarrow$  Vértices (5)

# El dual

(6) vértices  $\longrightarrow$  Toros (6)

(15) Aristas  $\longrightarrow$  Cuadrados (15)

(20) Triángulos  $\longrightarrow$  Aristas (20)

(5) Octaedros  $\longrightarrow$  Vértices (5)

# Los problemas

# Los problemas

- \* El problema de Grünbaum: Dados dos poliedros  $P$  y  $Q$ , ¿existe un politopo con todas sus facetas isomorfas a  $P$  y todas sus figuras de vértice isomorfas a  $Q$ ?



# Los problemas

- \* El problema de Grünbaum: Dados dos poliedros  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , ¿existe un politopo con todas sus facetas isomorfas a  $\mathcal{P}$  y todas sus figuras de vértice isomorfas a  $\mathcal{Q}$ ?
- \* Problema de extensión: Dado un poliedro  $\mathcal{P}$ , ¿existe un politopo con todas sus facetas de isomorfas a  $\mathcal{P}$ ?

# Los problemas

- \* El problema de Grünbaum: Dados dos poliedros  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , ¿existe un politopo con todas sus facetas isomorfas a  $\mathcal{P}$  y todas sus figuras de vértice isomorfas a  $\mathcal{Q}$ ?
- \* Problema de extensión: Dado un poliedro  $\mathcal{P}$ , ¿existe un politopo con todas sus facetas de isomorfas a  $\mathcal{P}$ ?
- \* Problema de extensión restringido: Dados un poliedro  $\mathcal{P}$  y un natural  $q \geq 3$ , ¿existe un politopo con todas sus facetas isomorfas a  $\mathcal{P}$  y con  $q$  facetas alrededor de cada arista?

# Los problemas

- \* Problema de Grünbaum
- \* Problema de extensión
- \* Problema de extensión restringido

# Los problemas

- \*Problema de Grünbaum
- \*Problema de extensión
- \*Problema de extensión restringido

+ Condiciones de simetría

# Caso regular

\* Problema de Grünbaum:

# Caso regular

\* Problema de Grünbaum:

- Resultado para esféricos y toroidales (McMullen-Schulte, 90's).

# Caso regular

\* Problema de Grünbaum:

- Resultado para esféricos y toroidales (McMullen-Schulte, 90's).
- Abierto en general.

# Caso regular

## \* Problema de Grünbaum:

- Resuelto para esféricos y toroidales (McMullen-Schulte, 90's).
- Abierto en general.

## \* Problema de extensión restringido:

- Resuelto para todo poliedro  $\mathcal{P}$  y todo entero  $q$  par (Danzer-Schulte, 80's, Pellicer, 2008).



# Caso regular

## \* Problema de Grünbaum:

- Resuelto para esféricos y toroidales (McMullen-Schulte, 90's).
- Abierto en general.

## \* Problema de extensión restringido:

- Resuelto para todo poliedro  $\mathcal{P}$  y todo entero  $q$  par (Danzer-Schulte, 80's, Pellicer, 2008).
- Falso en general para  $q$  impar (Hartley, 2005).

# ¿Menos simetría?

politopo quirales

¿Qué sucede si quiero que el politopo resultante sea quiral?  
(¡como nuestro ejemplo!)

# ¿Menos simetría?

politopo quirales

¿Qué sucede si quiero que el politopo resultante sea quiral?  
(¡como nuestro ejemplo!)

\* Problema de Grünbaum:

- Un montón de ejemplos para poliedros esféricos y toroidales (Weiss, Weiss-Colbourn, 80's).

# ¿Menos simetría?

politopo quirales

¿Qué sucede si quiero que el politopo resultante sea quiral?  
(¡como nuestro ejemplo!)

\* Problema de Grünbaum:

- Un montón de ejemplos para poliedros esféricos y toroidales (Weiss, Weiss-Colbourn, 80's).

\* Problema de extensión:

- Resuelto para todo poliedro no-regular (Cunningham-Pellicer, 2014).

# ¿Qué hay de nuevo, viejo?

Respecto al problema de extensión restringido:

- \* Todo mapa quiral en el toro con cuadrados admite extensión con 3 o con 4 facetas alrededor de cada arista.

# ¿Qué hay de nuevo, viejo?

Respecto al problema de extensión restringido:

- \* Todo mapa quiral en el toro con **cuadrados** admite extensión con **3** o con **4** facetas alrededor de cada arista.
- \* Todo mapa quiral en el toro con **hexágonos** o **triángulos** admite extensión con **3** o con **6** facetas alrededor de cada arista.

# ¿Qué hay de nuevo, viejo?

Respecto al problema de extensión restringido:

- \* Todo mapa quiral en el toro con cuadrados admite extensión con 3 o con 4 facetas alrededor de cada arista.
- \* Todo mapa quiral en el toro con hexágonos o triángulos admite extensión con 3 o con 6 facetas alrededor de cada arista.
- \* Casi todo mapa quiral en el toro con cuadrados admite extensión con  $4k$  o con  $6k$  aristas alrededor de cada faceta.

# ¿Qué hay de nuevo, viejo?

Respecto al problema de extensión restringido:

- \* Todo mapa quiral en el toro con **cuadrados** admite extensión con **3** o con **4** facetas alrededor de cada arista.
- \* Todo mapa quiral en el toro con **hexágonos** o **triángulos** admite extensión con **3** o con **6** facetas alrededor de cada arista.
- \* Casi todo mapa quiral en el toro con **cuadrados** admite extensión con  **$4k$**  o con  **$6k$**  aristas alrededor de cada faceta.
- \* Casi todo mapa quiral en el toro con **hexágonos** admite extensión con  **$6k$**  aristas alrededor de cada faceta.



# ¿Qué hay de nuevo, viejo?

Respecto al problema de extensión restringido:

- \* Todo mapa quiral en el toro con **cuadrados** admite extensión con **3** o con **4** facetas alrededor de cada arista.
- \* Todo mapa quiral en el toro con **hexágonos** o **triángulos** admite extensión con **3** o con **6** facetas alrededor de cada arista.
- \* Casi todo mapa quiral en el toro con **cuadrados** admite extensión con  **$4k$**  o con  **$6k$**  aristas alrededor de cada faceta.
- \* Casi todo mapa quiral en el toro con **hexágonos** admite extensión con  **$6k$**  aristas alrededor de cada faceta.
- \* Todo mapa quiral en el toro con **triángulos** admite extensión con  **$6k$**  facetas alrededor de cada arista.



¡Gracias!