Cubos de colores y otras cosas parecidas

Antonio Montero

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

2a Escuela de Verano en Simetrías de Estructuras Combinatorias
Cuernavaca, Mor.
Julio 2017

Politopos Abstractos

* Un politopo abstracto de rango n es un conjunto parcialmente ordenado que satisface...

Politopos Abstractos

* Un politopo abstracto de rango n es un conjunto parcialmente ordenado que satisface... ¡Fuchi!

Politopos Abstractos

* Un politopo abstracto de rango n es un conjunto parcialmente ordenado que satisface... ¡Fuchi!
* Lo que nos gusta recordar:

Politopos Abstractos

* Un politopo abstracto de rango n es un conjunto parcialmente ordenado que satisface... ¡Fuchi!

* Lo que nos gusta recordar:

  - Tiene vértices (0-caras), aristas (1-caras), 2-caras, $\ldots$, $(n-1)$-caras.

Politopos Abstractos

* Un politopo abstracto de rango n es un conjunto parcialmente ordenado que satisface... ¡Fuchi!
* Lo que nos gusta recordar:
  - Tiene vértices (0-caras), aristas (1-caras), 2-caras, ..., $(n-1)$-caras.
  - Es algo combinatorio: ¡Nos podemos hacer de la vista gorda con la geometría!

En esta plática

* No van a ver la definición de politopo abstracto (otra vez).

En esta plática

* No van a ver la definición de politopo abstracto (otra vez).

* No les voy a dar un solo teorema.

En esta plática

* No van a ver la definición de politopo abstracto (otra vez).
* No les voy a dar un solo teorema.
* Vamos a construir muchos ejemplos.

En esta plática

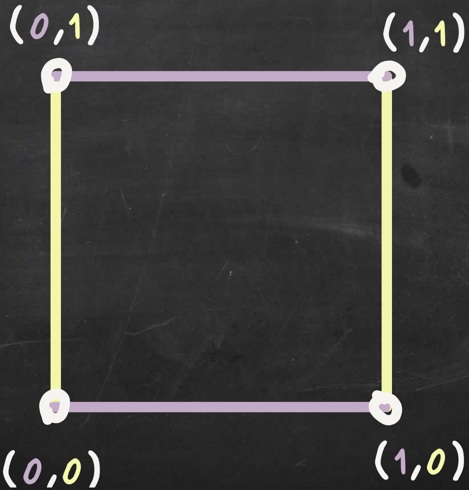
* No van a ver la definición de politopo abstracto (otra vez).
* No les voy a dar un solo teorema.
* Vamos a construir muchos ejemplos.
* Les voy a hablar mucho del único politopo que conozco bien

Mi 2-politopo favorito

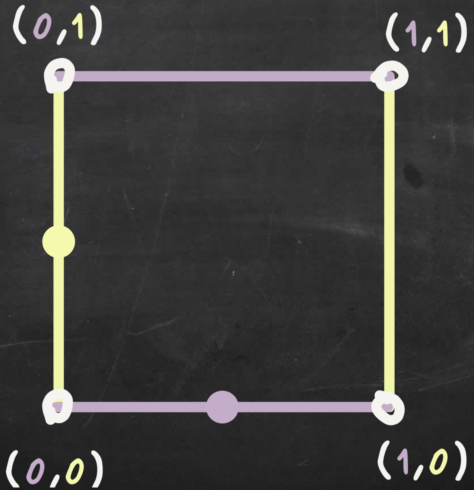
Mi 2-politopo favorito

Mi 2-politopo favorito

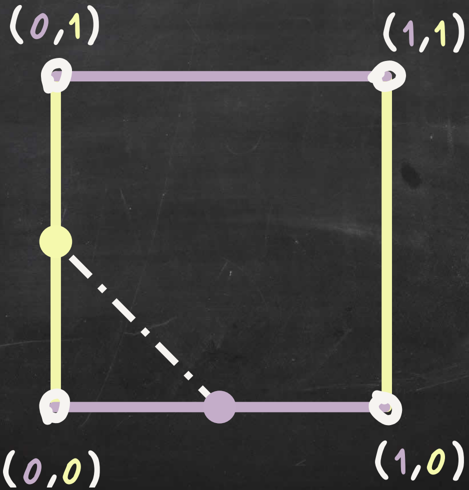
Mi 2-politopo favorito



Mi 2-politopo favorito



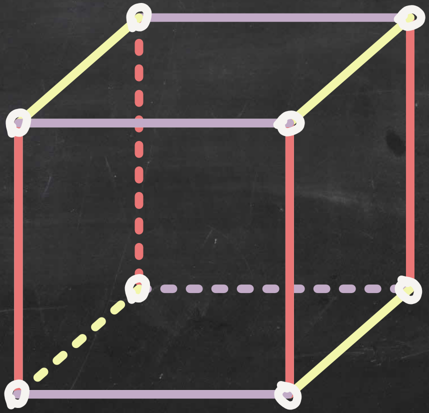
Mi 2-politopo favorito



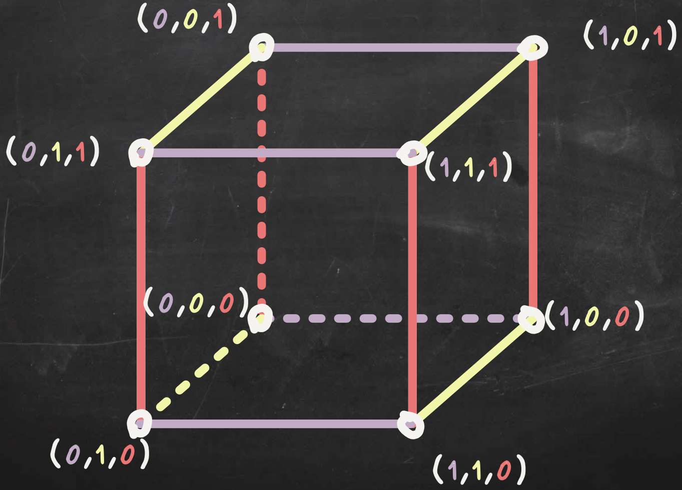
Mi 3-politopo favorito

Mi 3-politopo favorito

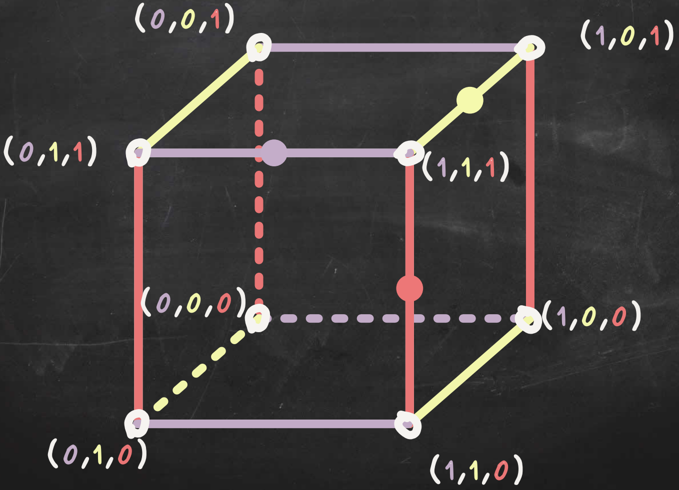
Mi 3-politopo favorito



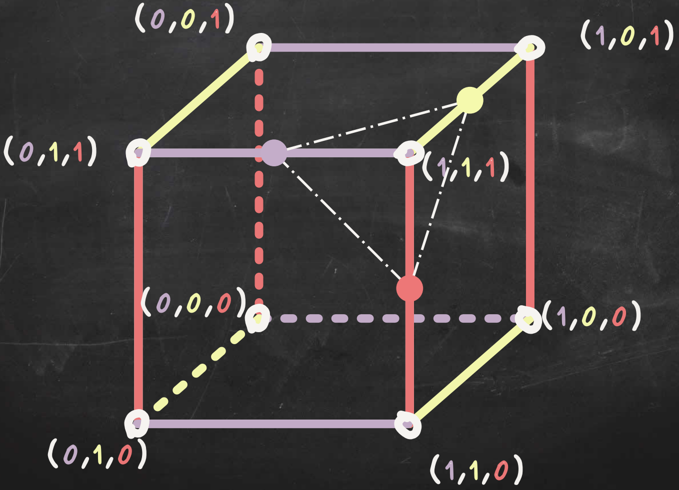
Mi 3-politopo favorito



Mi 3-politopo favorito



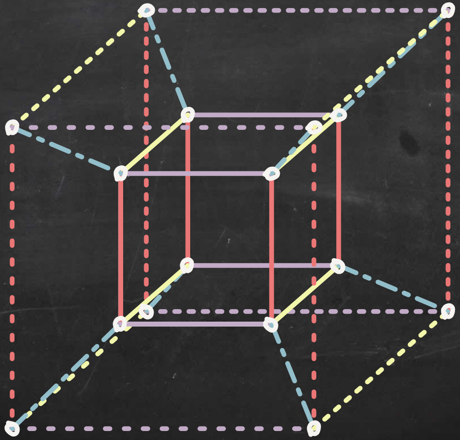
Mi 3-politopo favorito



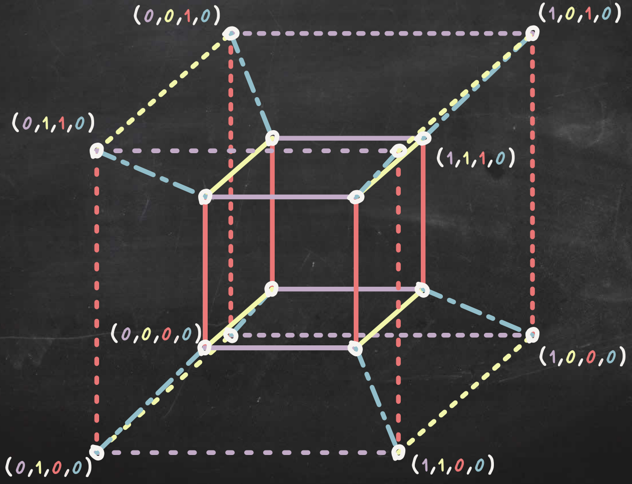
Mi 4-politopo favorito

Mi 4-politopo favorito

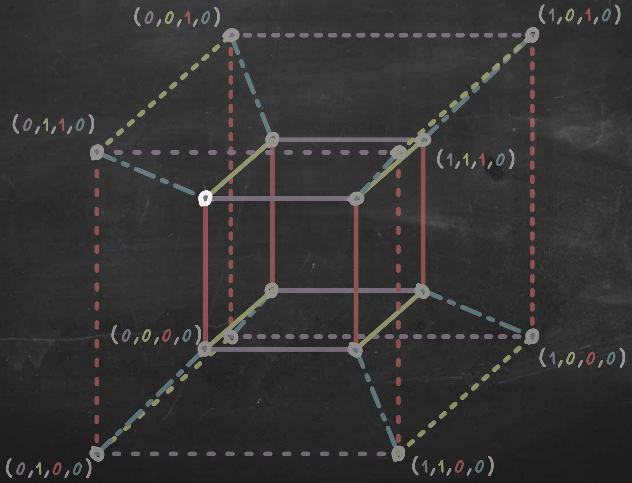
Mi 4-politopo favorito



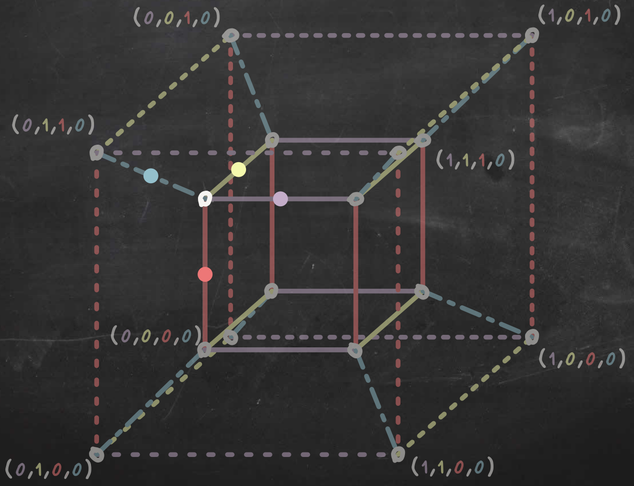
Mi 4-politopo favorito



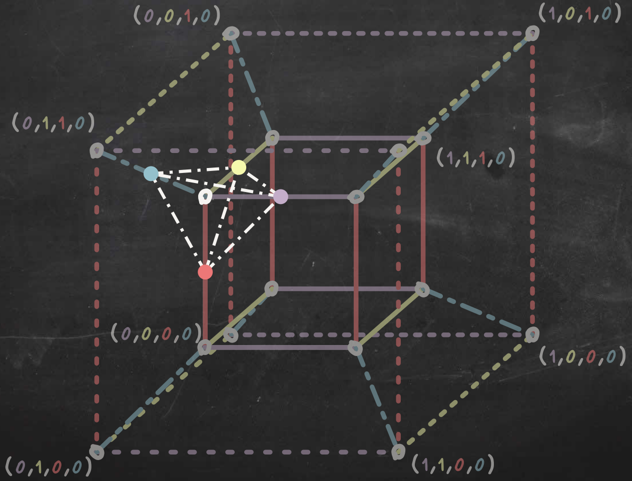
Mi 4-politopo favorito



Mi 4-politopo favorito



Mi 4-politopo favorito



Mi n-politopo favorito

* Vértices: $\{0,1\}^n$, las n-sucesiones de 0's y 1's.

Mi n-politopo favorito

* Vértices: $\{0,1\}^n$, las n-sucesiones de 0's y 1's.
* Aristas: parejas de vértices con $n-1$ coordenadas fijas.

Mi n-politopo favorito

* Vértices: $\{0,1\}^n$, las n-sucesiones de 0's y 1's.
* Aristas: parejas de vértices con $n-1$ coordenadas fijas.
* 2-caras: familias de vértices con $n-2$ coordenadas fijas.

Mi n-politopo favorito

* Vértices: $\{0,1\}^n$, las n-sucesiones de 0's y 1's.
* Aristas: parejas de vértices con $n-1$ coordenadas fijas.
* 2-caras: familias de vértices con $n-2$ coordenadas fijas.
* ...
* i-caras: familias de vértices con $n-i$ coordenadas fijas.
* ...

Mi n-politopo favorito

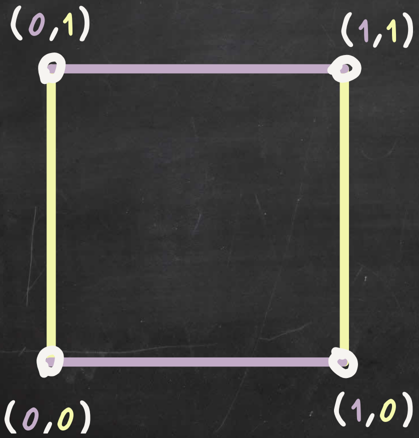
* Vértices: $\{0,1\}^n$, las n-sucesiones de 0's y 1's.
* Aristas: parejas de vértices con $n-1$ coordenadas fijas.
* 2-caras: familias de vértices con $n-2$ coordenadas fijas.
* ...
* i-caras: familias de vértices con $n-i$ coordenadas fijas.
* ...
* $(n-1)$-caras: familias de vértices con 1 coordenada fija.

Mi n-politopo favorito

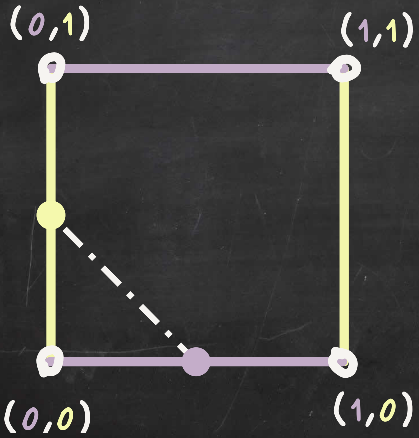
* Vértices: $\{0,1\}^n$, las n-sucesiones de 0's y 1's.
* Aristas: parejas de vértices con $n-1$ coordenadas fijas.
* 2-caras: familias de vértices con $n-2$ coordenadas fijas.
* ...
* i-caras: familias de vértices con $n-i$ coordenadas fijas.
* ...
* $(n-1)$-caras: familias de vértices con 1 coordenada fija.
* Figura de vértice: Un $(n-1)$-simplejo.

2|

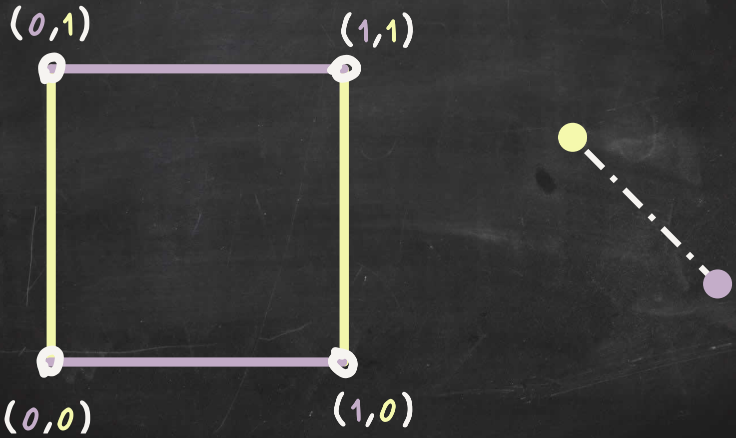
2|



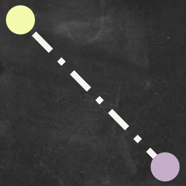
2|



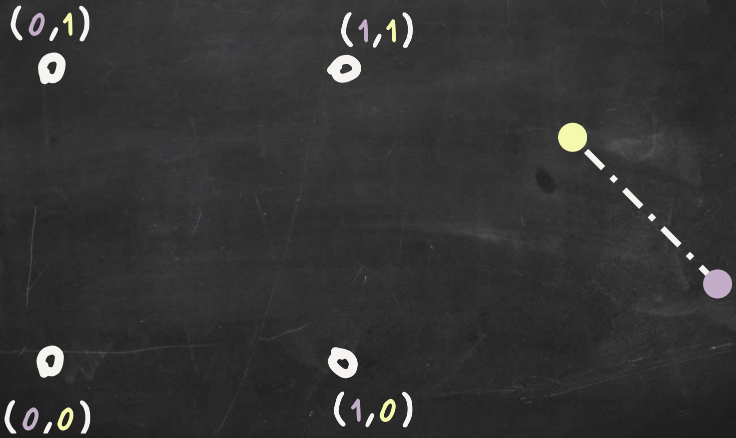
2|



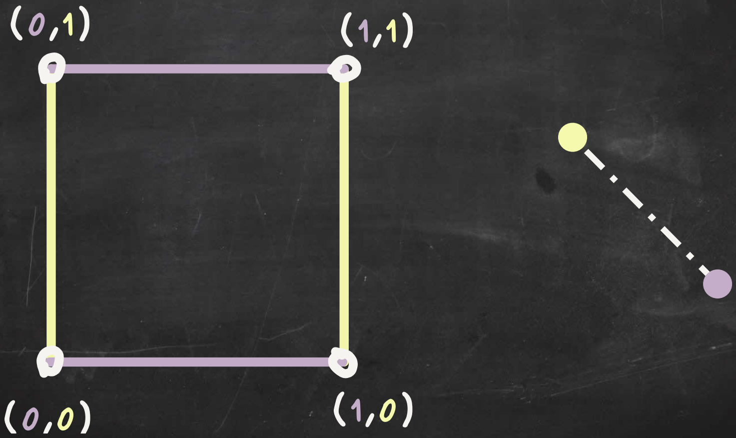
2|



2

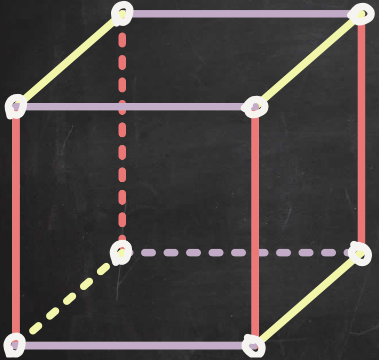


2|

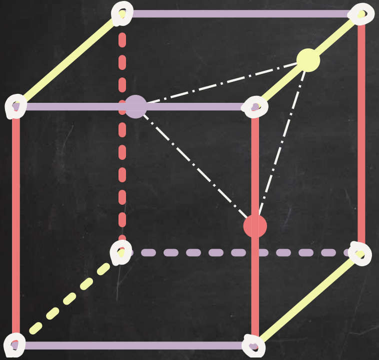


$2^{\triangle}$

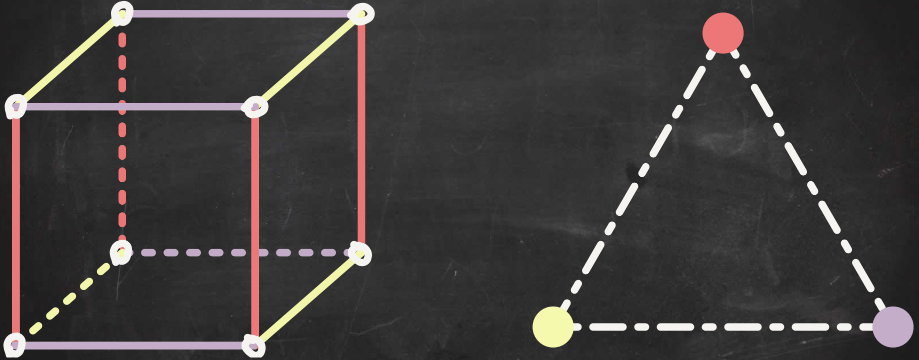
$2^{\triangle}$



$2^{\triangle}$

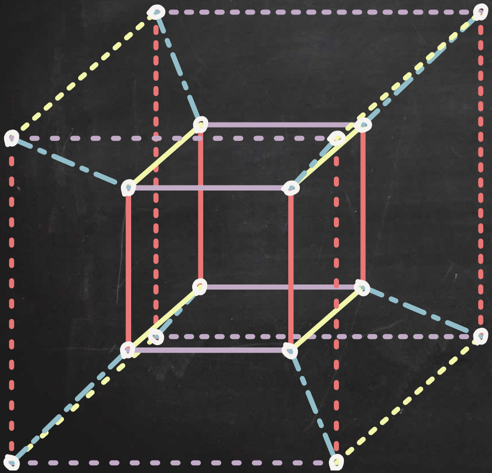


$2^{\triangle}$

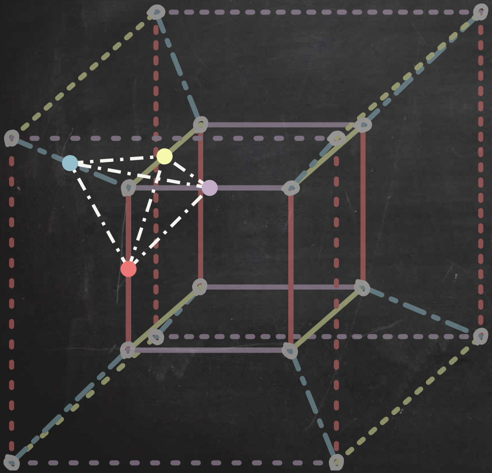


2 Tetraedro

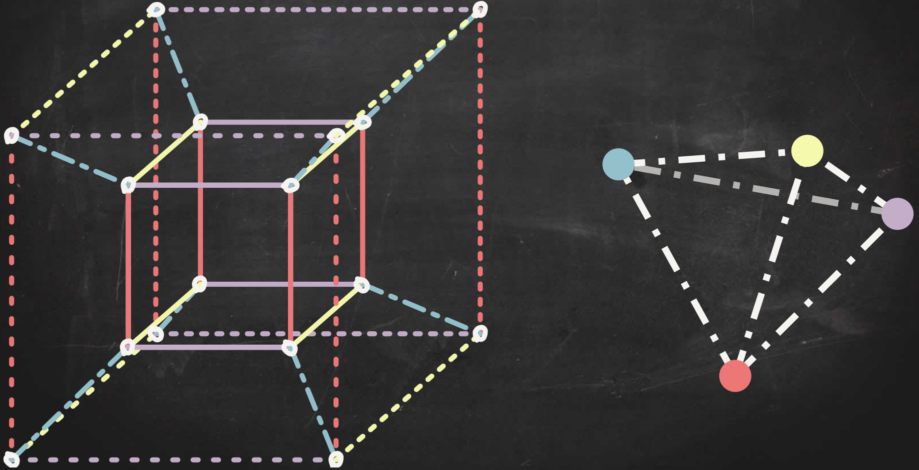
$_2$Tetraedro



$_2$Tetraedro



$_2$Tetraedro



En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

* Vértices: $\{0,1\}^V$, $V = |$Vértices de $\mathcal{P}|$.

En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

* Vértices: $\{0,1\}^V$, $V = |\text{Vértices de } \mathcal{P}|$.
* Aristas: Determinadas por los vértices de $\mathcal{P}$ (¡Colores!).

En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

* Vértices: $\{0,1\}^V$, $V = |\text{Vértices de } \mathcal{P}|$.
* Aristas: Determinadas por los vértices de $\mathcal{P}$ (¡Colores!).
* 2-caras: Determinadas por aristas de $\mathcal{P}$.

En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

* Vértices: $\{0,1\}^V$, $V = |\text{Vértices de } \mathcal{P}|$.
* Aristas: Determinadas por los vértices de $\mathcal{P}$ (¡Colores!).
* 2-caras: Determinadas por aristas de $\mathcal{P}$.
* ...
* i-caras: Determinadas por $(i-1)$-caras de $\mathcal{P}$.
* ...

En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

* Vértices: $\{0,1\}^V$, $V = |\text{Vértices de } \mathcal{P}|$.
* Aristas: Determinadas por los vértices de $\mathcal{P}$ (¡Colores!).
* 2-caras: Determinadas por aristas de $\mathcal{P}$.
* ...
* i-caras: Determinadas por $(i-1)$-caras de $\mathcal{P}$.
* ...
* $(n+1)$-cara: Determinada por $\mathcal{P}$.

En general...

Si comenzamos con $\mathcal{P}$ un n-politopo el politopo $2^{\mathcal{P}}$ se construye igualito al cubo:

* Vértices: $\{0,1\}^V$, $V = |\text{Vértices de } \mathcal{P}|$.
* Aristas: Determinadas por los vértices de $\mathcal{P}$ (¡Colores!).
* 2-caras: Determinadas por aristas de $\mathcal{P}$.
* ...
* i-caras: Determinadas por $(i-1)$-caras de $\mathcal{P}$.
* ...
* $(n+1)$-cara: Determinada por $\mathcal{P}$.

pero...

Pero...

¡Es la construcción que vimos antes!

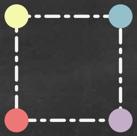
pero...

¡Es la construcción que vimos antes!

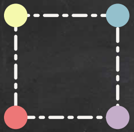
$$2^{n-\text{simplejo}} = (n+1) - \textit{cubo}$$

¡No te creo nada!

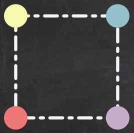
¡No te creo nada!

¿2  ?

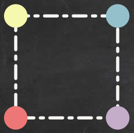
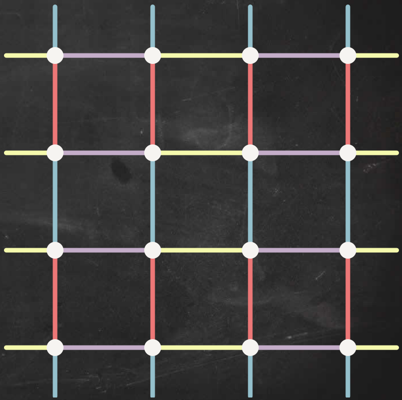
¡No te creo nada!

2  =

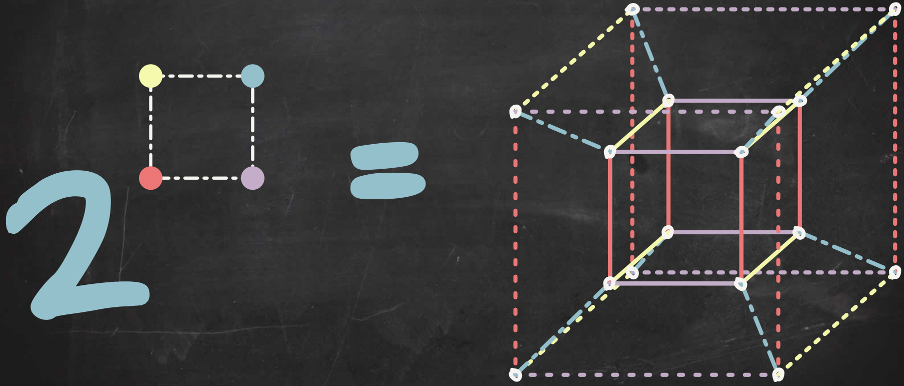
¡No te creo nada!

2  =

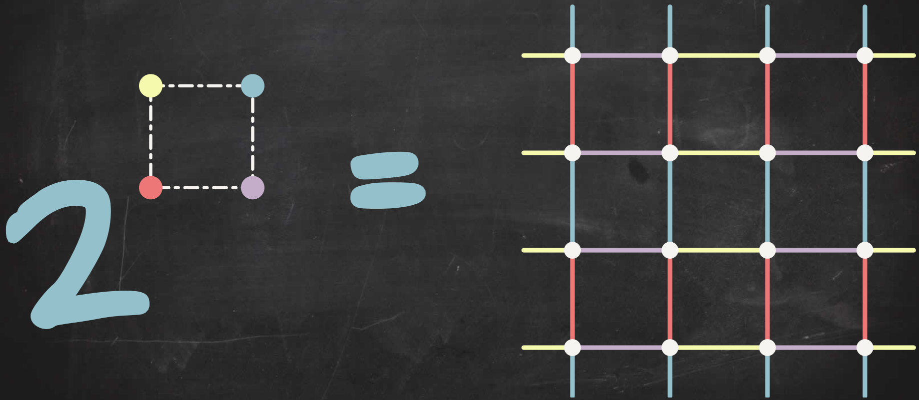
¡No te creo nada!

2  = 

¡No te creo nada!



¡No te creo nada!



$_2$Polígono

Es un 3-politopo (mapa) que tiene:

${}_2$polígono

Es un 3-politopo (mapa) que tiene:

* 2^m vértices

2polígono

Es un 3-politopo (mapa) que tiene:

- 2^m vértices
- $2^{m-1} \times m$ aristas

2polígono

Es un 3-politopo (mapa) que tiene:

* 2^m vértices
* $2^{m-1} \times m$ aristas
* $2^{m-2} \times m$ cuadrados

${}_2$Polígono

Es un 3-politopo (mapa) que tiene:

* 2^m vértices
* $2^{m-1} \times m$ aristas
* $2^{m-2} \times m$ cuadrados
* Vive en una superficie de género $2^{m-3}(m-4)+1$.

Lo más general

Si $\mathcal{P}$ es un n-politopo lo más probable es que no pueda dibujar $2^{\mathcal{P}}$... : (

Lo más general

Si $\mathcal{P}$ es un n-politopo lo más probable es que no pueda dibujar $2^{\mathcal{P}}$... : (

Tiene propiedades decentes:

Lo más general

Si $\mathcal{P}$ es un n-politopo lo más probable es que no pueda dibujar $2^{\mathcal{P}}$... : (

Tiene propiedades decentes:

* Si $\mathcal{P}$ tiene V vértices, entonces $2^{\mathcal{P}}$ tiene 2^{V} vértices.

Lo más general

Si $\mathcal{P}$ es un n-politopo lo más probable es que no pueda dibujar $2^{\mathcal{P}}$... : (

Tiene propiedades decentes:

* Si $\mathcal{P}$ tiene V vértices, entonces $2^{\mathcal{P}}$ tiene 2^{V} vértices.
* Las i-caras de $2^{\mathcal{P}}$ son de la forma 2^{F} con F una $(i-1)$-cara de $\mathcal{P}$.

Lo más general

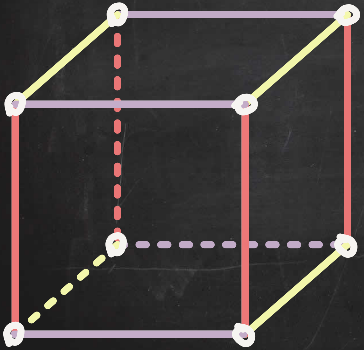
Si $\mathcal{P}$ es un n-politopo lo más probable es que no pueda dibujar $2^{\mathcal{P}}$... :(

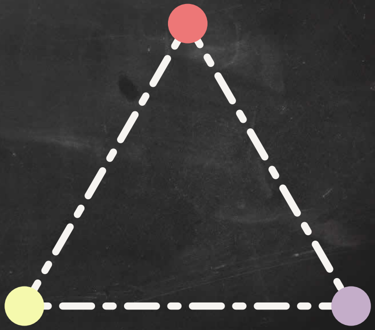
Tiene propiedades decentes:

* Si $\mathcal{P}$ tiene V vértices, entonces $2^{\mathcal{P}}$ tiene 2^V vértices.
* Las i-caras de $2^{\mathcal{P}}$ son de la forma 2^F con F una $(i-1)$-cara de $\mathcal{P}$.
* Las figuras de vértice de $2^{\mathcal{P}}$ son todas isomorfas a $\mathcal{P}$.

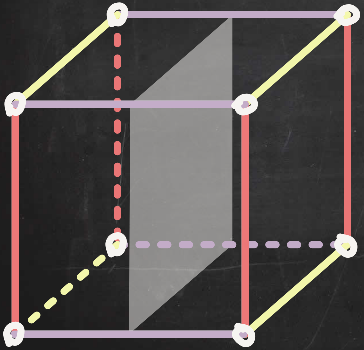
¿Qué pasa con las simetrías?

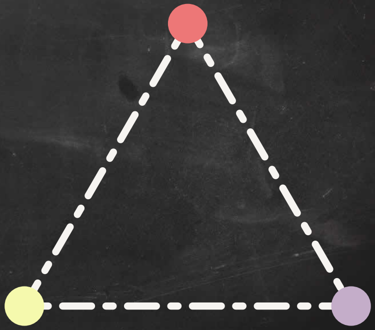
¿Qué pasa con las simetrías?



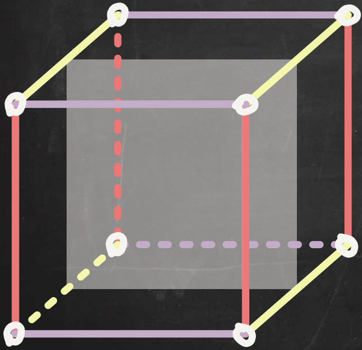


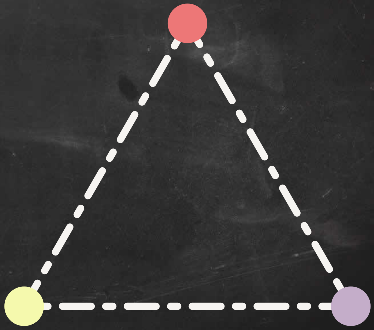
¿Qué pasa con las simetrías?



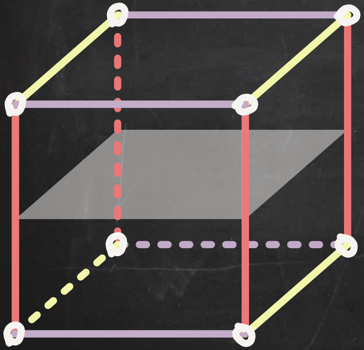


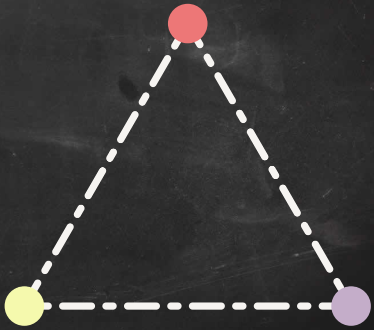
¿Qué pasa con las simetrías?



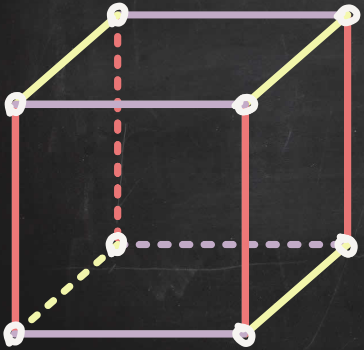


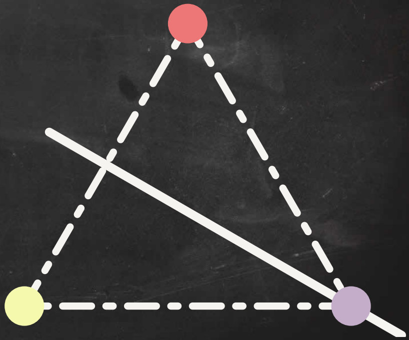
¿Qué pasa con las simetrías?



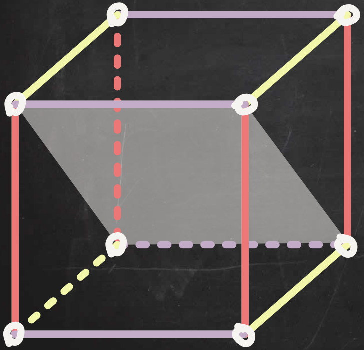


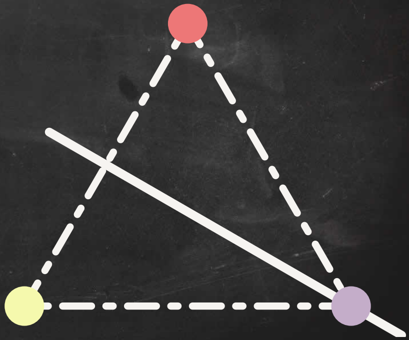
¿Qué pasa con las simetrías?



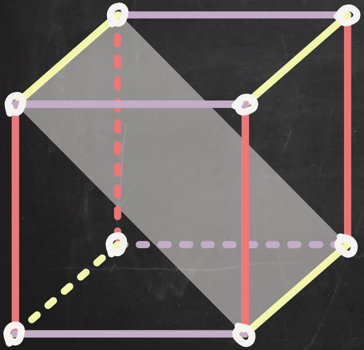


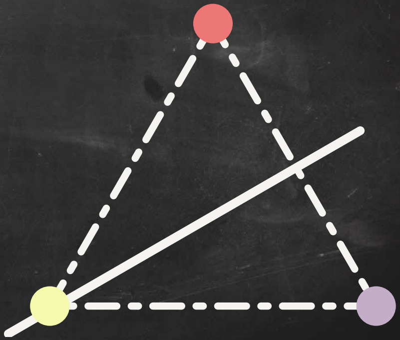
¿Qué pasa con las simetrías?



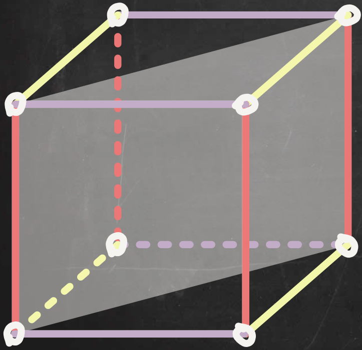


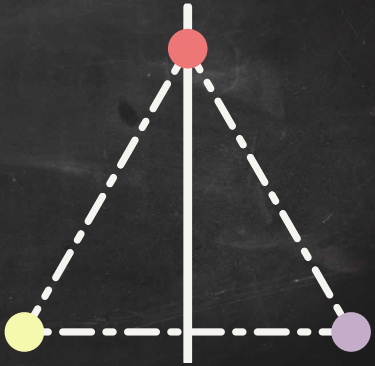
¿Qué pasa con las simetrías?





¿Qué pasa con las simetrías?





¿Qué pasa con las simetrías?

* Uno se puede convencer de que toda simetría del cubo es composición de éstas.

¿Qué pasa con las simetrías?

* Uno se puede convencer de que toda simetría del cubo es composición de éstas.

* Con palabrotas

$$\Gamma(\text{cubo}) = C_2^3 \rtimes \Gamma(\text{triángulo})$$

¿Qué pasa con las simetrías?

* En $2^{\mathcal{P}}$ tenemos V reflexiones que preservan colores.

¿Qué pasa con las simetrías?

* En $2^{\mathcal{P}}$ tenemos V reflexiones que preservan colores.
* Todo automorfismo de $\mathcal{P}$ induce automorfismo de $2^{\mathcal{P}}$.

¿Qué pasa con las simetrías?

* En $2^{\mathcal{P}}$ tenemos V reflexiones que preservan colores.
* Todo automorfismo de $\mathcal{P}$ induce automorfismo de $2^{\mathcal{P}}$.
* Con palabrotas:

$$\Gamma(2^{\mathcal{P}}) = C_2^V \rtimes \Gamma(\mathcal{P})$$

¿Qué pasa con las simetrías?

$$\Gamma(2^{\mathcal{P}}) = C_2^V \rtimes \Gamma(\mathcal{P})$$

Esto tiene algunas implicaciones:

¿Qué pasa con las simetrías?

$$\Gamma(2^{\mathcal{P}}) = C_2^V \rtimes \Gamma(\mathcal{P})$$

Esto tiene algunas implicaciones:

* Si $\mathcal{P}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{P}}$ es regular.

¿Qué pasa con las simetrías?

$$\Gamma(2^{\mathcal{P}}) = C_2^V \rtimes \Gamma(\mathcal{P})$$

Esto tiene algunas implicaciones:

* Si $\mathcal{P}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{P}}$ es regular.
* $2^{\mathcal{P}}$ es transitivo en vértices, sin importar qué simetría tenga $\mathcal{P}$.

¿Qué pasa con las simetrías?

$$\Gamma(2^{\mathcal{P}}) = C_2^V \rtimes \Gamma(\mathcal{P})$$

Esto tiene algunas implicaciones:

* Si $\mathcal{P}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{P}}$ es regular.
* $2^{\mathcal{P}}$ es transitivo en vértices, sin importar qué simetría tenga $\mathcal{P}$.
* El estabilizador de un vértice es $\Gamma(\mathcal{P})$.

Ya para terminar...

* Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas figuras de vértice son isomorfas a $\mathcal{P}$.

Ya para terminar...

* Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas figuras de vértice son isomorfas a $\mathcal{P}$.

* Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$.

Ya para terminar...

* Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas figuras de vértice son isomorfas a $\mathcal{P}$.
* Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$.
* Los politopos apretados (tight) son malos candidatos... : (

Ya para terminar...

- Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas figuras de vértice son isomorfas a $\mathcal{P}$.

- Dado casi cualquier n-politopo (regular) $\mathcal{P}$ existe un $(n+1)$-politopo (regular) cuyas facetas son isomorfas a $\mathcal{P}$.

- Los politopos apretados (tight) son malos candidatos... : (

- Aún así, nos da un montón de ejemplos con propiedades decentes.

¡Gracias!