Cubos generalizados y extensiones de politopos abstractos

Antonio Montero

Centro de Ciencias Matemátias UNAM

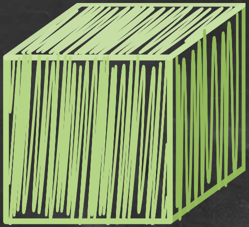
XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana
Aguascalientes, Ags. Octubre 2016

Problema

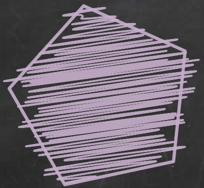
Dado un polígono regular $\mathcal{K}$ ¿existe un poliedro regular $\mathcal{P}$ tal que todas las caras de $\mathcal{P}$ son isomorfas a $\mathcal{K}$?

¿Soluciones?

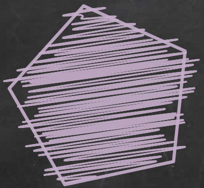
¿Soluciones?

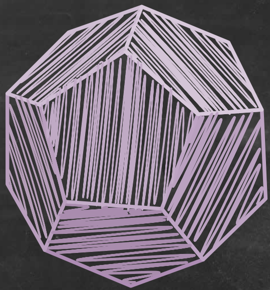


¿Soluciones?

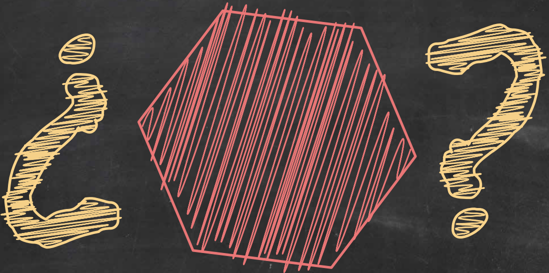


¿Soluciones?

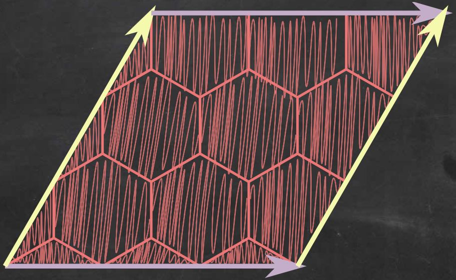




¿Soluciones?



¿Soluciones?



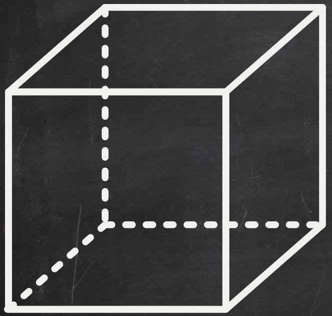
¿Qué está pasando?

* Las restricciones que se nos ocurren son de carácter geométrico.

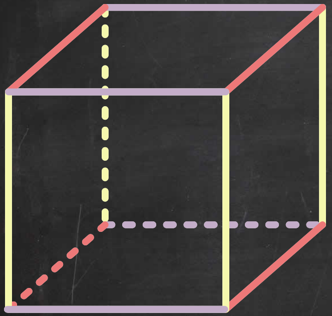
¿Qué está pasando?

* Las restricciones que se nos ocurren son de carácter geométrico.
* Puede ser que el mundo en el que estamos buscando respuestas es muy pequeño.

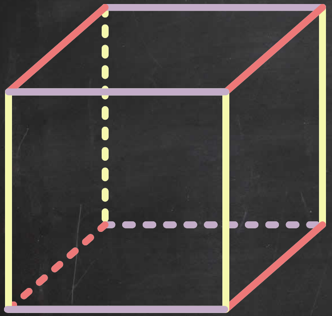
El cubo...

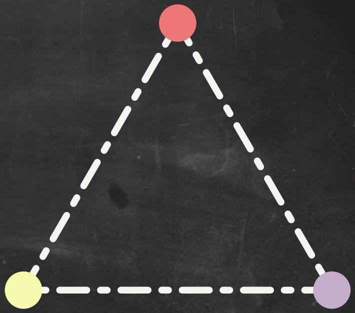


El cubo...

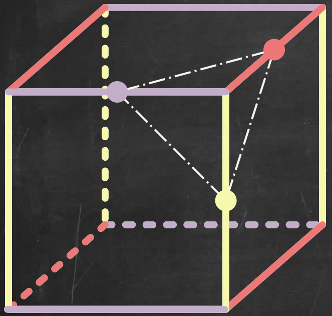


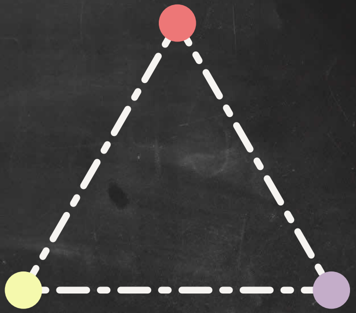
El cubo...



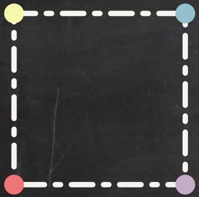


El cubo...

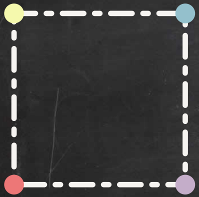




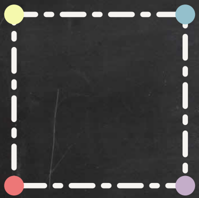
Podemos generalizar...

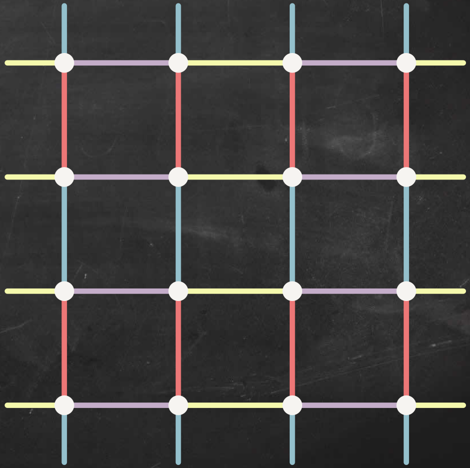


Podemos generalizar...

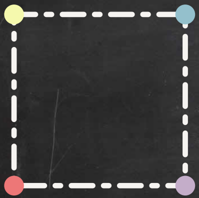


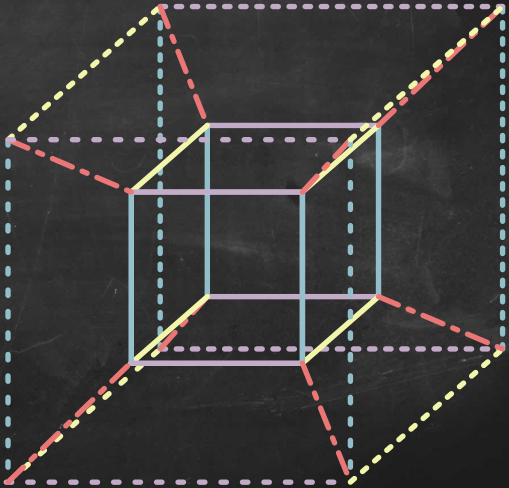
Podemos generalizar...



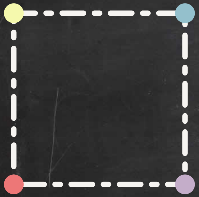


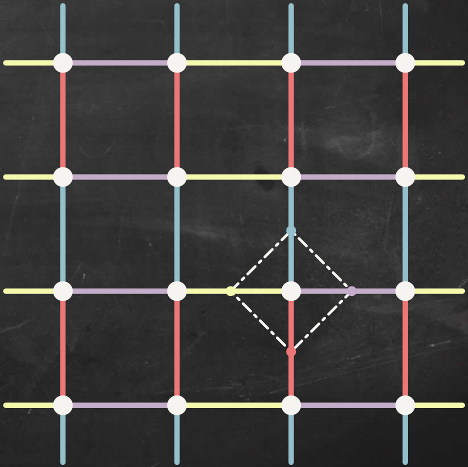
Podemos generalizar...





Podemos generalizar...





Podemos generalizar...

* Esta construcción, para un polígono $\mathcal{P}$ se llama $2^{\mathcal{P}}$.

Podemos generalizar...

* Esta construcción, para un polígono $\mathcal{P}$ se llama $2^{\mathcal{P}}$.
* Es una construcción de L. Danzer y E. Schulte (80's).

Podemos generalizar...

- Esta construcción, para un polígono $\mathcal{P}$ se llama $2^{\mathcal{P}}$.
- Es una construcción de L. Danzer y E. Schulte (80's).
- Es totalmente combinatoria, es decir, no depende de la geometría.

Algunas propiedades

* Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono, $2^{\mathcal{P}}$ es un mapa con 2^n vértices, $2^{n-1}n$ aristas y $2^{n-2}n$ caras en una superficie de género $2^{n-3}(n-4)+1$.

Algunas propiedades

* Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono, $2^{\mathcal{P}}$ es un mapa con 2^n vértices, $2^{n-1}n$ aristas y $2^{n-2}n$ caras en una superficie de género $2^{n-3}(n-4)+1$.
* Las caras de $2^{\mathcal{P}}$ son siempre cuadrados.

Algunas propiedades

* Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono, $2^{\mathcal{P}}$ es un mapa con 2^n vértices, $2^{n-1}n$ aristas y $2^{n-2}n$ caras en una superficie de género $2^{n-3}(n-4)+1$.
* Las caras de $2^{\mathcal{P}}$ son siempre cuadrados.
* Si $\mathcal{P}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{P}}$ es regular.

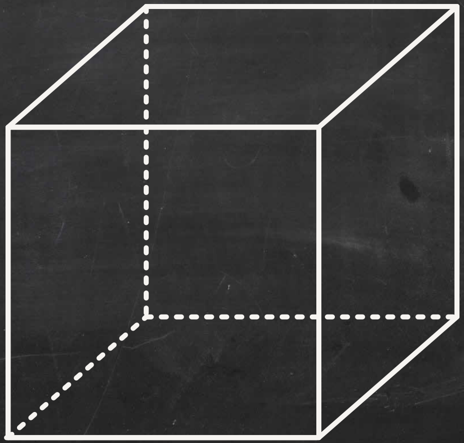
Algunas propiedades

* Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono, $2^{\mathcal{P}}$ es un mapa con 2^n vértices, $2^{n-1}n$ aristas y $2^{n-2}n$ caras en una superficie de género $2^{n-3}(n-4)+1$.
* Las caras de $2^{\mathcal{P}}$ son siempre cuadrados.
* Si $\mathcal{P}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{P}}$ es regular.
* El grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{P}}$ es $C_2^n \rtimes D_n$.

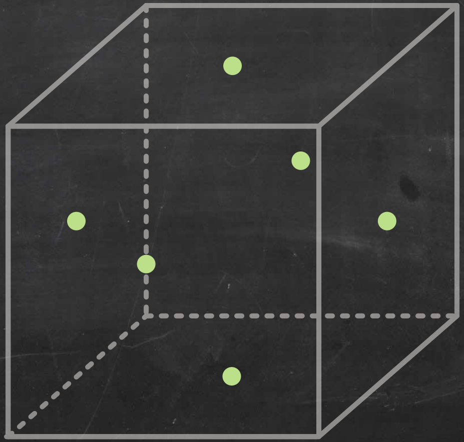
Algunas propiedades

- Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono, $2^{\mathcal{P}}$ es un mapa con 2^n vértices, $2^{n-1}n$ aristas y $2^{n-2}n$ caras en una superficie de género $2^{n-3}(n-4)+1$.
- Las caras de $2^{\mathcal{P}}$ son siempre cuadrados.
- Si $\mathcal{P}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{P}}$ es regular.
- El grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{P}}$ es $C_2^n \rtimes D_n$.
- Todas las figuras de vértice de $2^{\mathcal{P}}$ son isomorfas a $\mathcal{P}$.

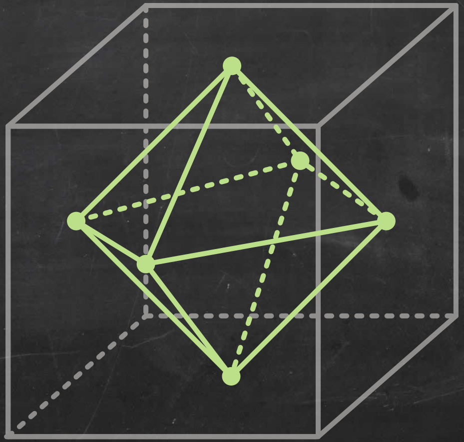
El mapa dual



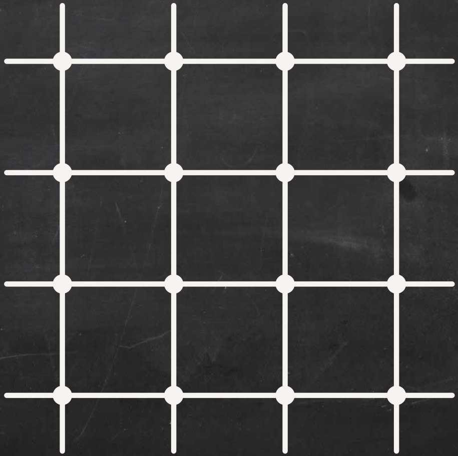
El mapa dual



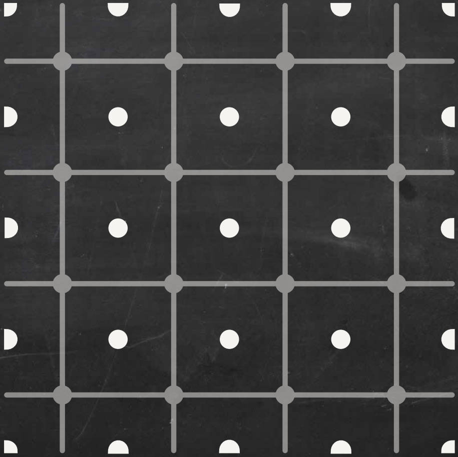
El mapa dual



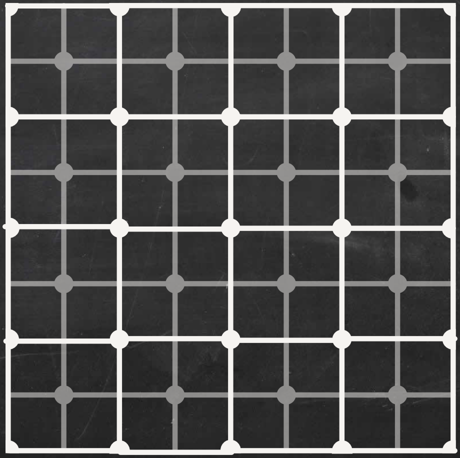
El mapa dual



El mapa dual



El mapa dual



¡Tenemos un teorema!

¡Tenemos un teorema!

Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono (regular), el mapa $\left(2^{\mathcal{P}}\right)^*$ es una extensión regular de $\mathcal{P}$.

¡Tenemos un teorema!

Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un n-ágono (regular), el mapa $\left(2^{\mathcal{P}}\right)^{*}$ es una extensión regular de $\mathcal{P}$.

Por lo tanto, el problema de extensiones regulares tiene solución para los polígonos.

¿Tiene sentido plantear el problema de extensiones regulares en dimensiones superiores?

¿Tiene sentido plantear el problema de extensiones regulares en dimensiones superiores?

La respuesta es que sí, pero para ello hay que precisar bien en qué mundo estamos trabajando...

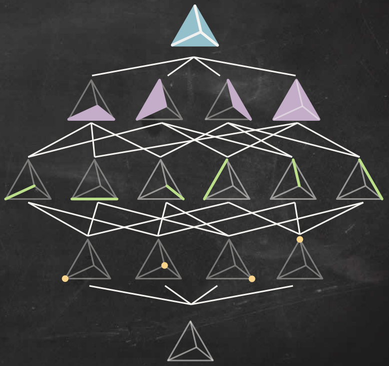
Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

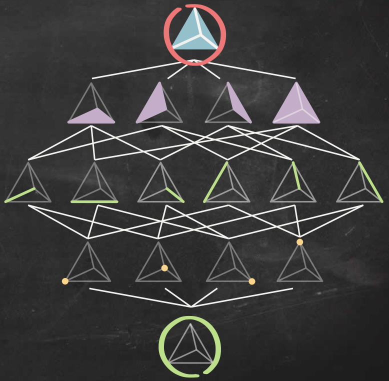
* Tiene máximo y mínimo.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

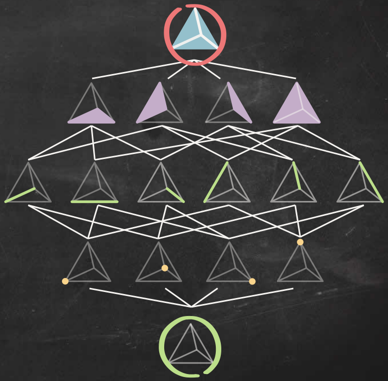
* Tiene máximo y mínimo.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

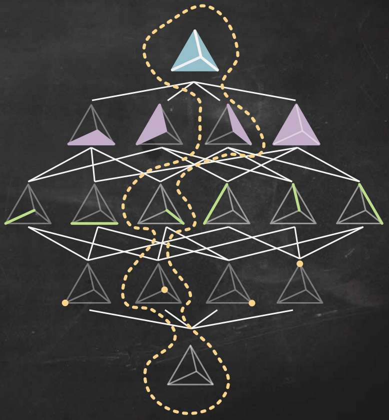
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n + 2$ elementos.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

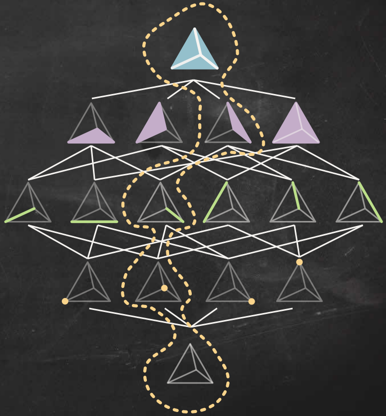
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

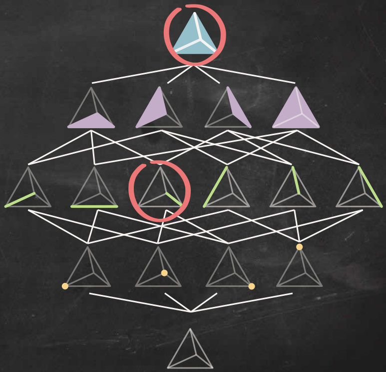
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

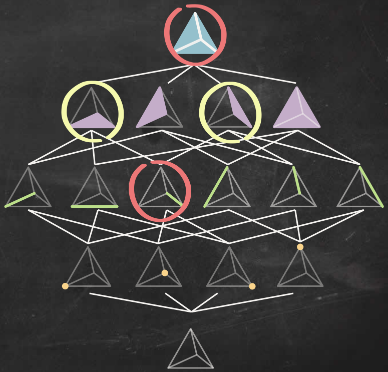
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

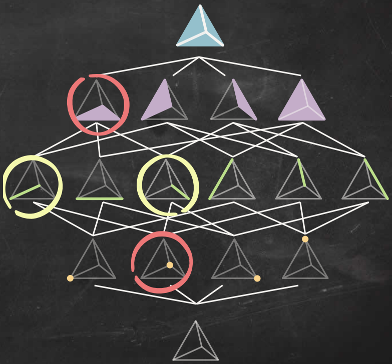
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

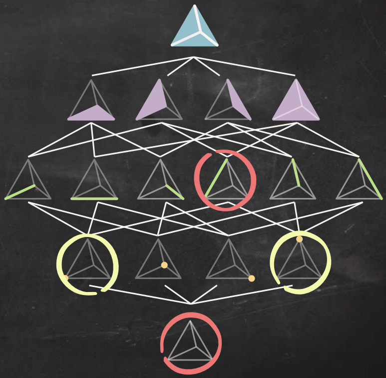
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

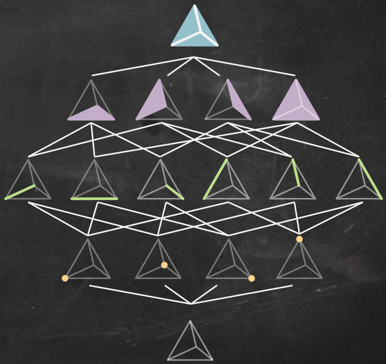
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

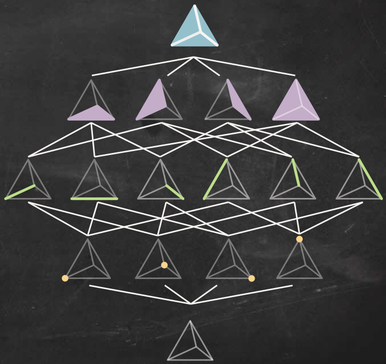
- Tiene máximo y mínimo.
- Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
- $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.
- $\mathcal{P}$ es fuertemente conexo.



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.
* $\mathcal{P}$ es fuertemente conexo.
* Las facetas de $\mathcal{P}$...



Politopos abstractos

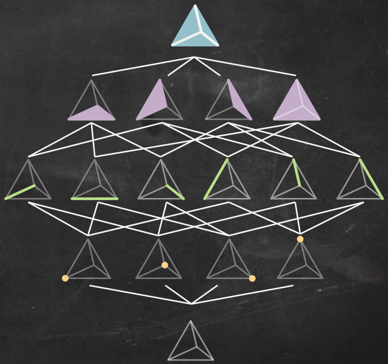
Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.
* $\mathcal{P}$ es fuertemente conexo.
* Las facetas de $\mathcal{P}$...

Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

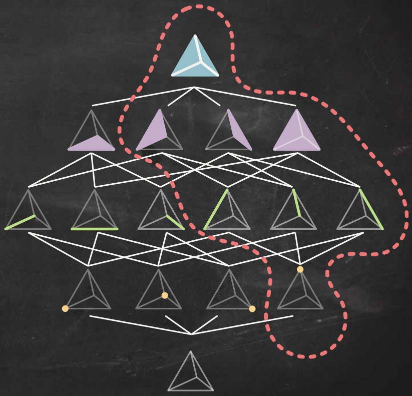
* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.
* $\mathcal{P}$ es fuertemente conexo.
* Las facetas de $\mathcal{P}$...
* Las figuras de vértice de $\mathcal{P}$...



Politopos abstractos

Un politopo abstracto de rango n es un Co. P. O. $(\mathcal{P}, \leqslant)$ que satisface:

* Tiene máximo y mínimo.
* Todas las banderas tienen $n+2$ elementos.
* $\mathcal{P}$ satisface la propiedad del diamante.
* $\mathcal{P}$ es fuertemente conexo.
* Las facetas de $\mathcal{P}$...
* Las figuras de vértice de $\mathcal{P}$...



Politopos abstractos
Ejemplos

* $n = 2$: Polígonos combinatorios.

Politopos abstractos
Ejemplos

- $n = 2$: Polígonos combinatorios.
- $n = 3$: Mapas en superficies, teselaciones de $\mathbb{E}^2$ y $\mathbb{H}^2$.

Politopos abstractos
Ejemplos

- $n = 2$: Polígonos combinatorios.
- $n = 3$: Mapas en superficies, teselaciones de $\mathbb{E}^2$ y $\mathbb{H}^2$.
- Teselaciones de $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{E}^n$ y $\mathbb{H}^n$.

Politopos abstractos

Ejemplos

- $n = 2$: Polígonos combinatorios.
- $n = 3$: Mapas en superficies, teselaciones de $\mathbb{E}^2$ y $\mathbb{H}^2$.
- Teselaciones de $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{E}^n$ y $\mathbb{H}^n$.
- Teselaciones de variedades.

Politopos abstractos
Ejemplos

* $n = 2$: Polígonos combinatorios.
* $n = 3$: Mapas en superficies, teselaciones de $\mathbb{E}^2$ y $\mathbb{H}^2$.
* Teselaciones de $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{E}^n$ y $\mathbb{H}^n$.
* Teselaciones de variedades.
* Otros...

Politopos abstractos
Grupo de Automorfismos

Si $\mathcal{P}$ es un politopo abstracto, el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$, $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de biyecciones de $\mathcal{P}$ que preservan el orden.

Politopos abstractos
Grupo de Automorfismos

Si $\mathcal{P}$ es un politopo abstracto, el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$, $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de biyecciones de $\mathcal{P}$ que preservan el orden.

- $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera natural en las banderas de $\mathcal{P}$.

Politopos abstractos

Grupo de Automorfismos

Si $\mathcal{P}$ es un politopo abstracto, el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$, $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de biyecciones de $\mathcal{P}$ que preservan el orden.

* $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera natural en las banderas de $\mathcal{P}$.
* Esta acción es libre, es decir los estabilizadores son triviales.

Politopos abstractos
Grupo de Automorfismos

Si $\mathcal{P}$ es un politopo abstracto, el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$, $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de biyecciones de $\mathcal{P}$ que preservan el orden.

* $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera natural en las banderas de $\mathcal{P}$.
* Esta acción es libre, es decir los estabilizadores son triviales.
* Un automorfismo está determinado por la imagen de una bandera.

Politopos abstractos
Grupo de Automorfismos

Si $\mathcal{P}$ es un politopo abstracto, el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$, $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de biyecciones de $\mathcal{P}$ que preservan el orden.

* $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera natural en las banderas de $\mathcal{P}$.
* Esta acción es libre, es decir los estabilizadores son triviales.
* Un automorfismo está determinado por la imagen de una bandera.
* Un politopo $\mathcal{P}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en las banderas.

¿Cómo planteamos el problema de extensión?

¿Cómo planteamos el problema de extensión?

Dado un ~~polígono~~ n-politopo regular $\mathcal{K}$ ¿existe un ~~poliedro~~ $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ tal que todas las ~~caras~~ facetas de $\mathcal{P}$ son isomorfas a $\mathcal{K}$?

¿Cómo planteamos el problema de extensión?

Dado un ~~polígono~~ n-politopo regular $\mathcal{K}$ ¿existe un ~~poliedro~~ $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ tal que todas las ~~caras~~ facetas de $\mathcal{P}$ son isomorfas a $\mathcal{K}$?

¿Podemos hablar del $2^{\mathcal{K}}$ si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular?

¿Cómo planteamos el problema de extensión?

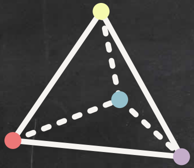
Dado un ~~polígono~~ n-politopo regular $\mathcal{K}$ ¿existe un ~~poliedro~~ $(n+1)$-politopo regular $\mathcal{P}$ tal que todas las ~~caras~~ facetas de $\mathcal{P}$ son isomorfas a $\mathcal{K}$?

¿Podemos hablar del $2^{\mathcal{K}}$ si $\mathcal{K}$ es un n-politopo regular?

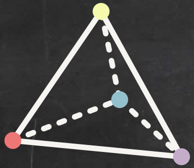
¿$\mathcal{P} = 2^{\mathcal{K}}$ resuelve el problema de extensión?

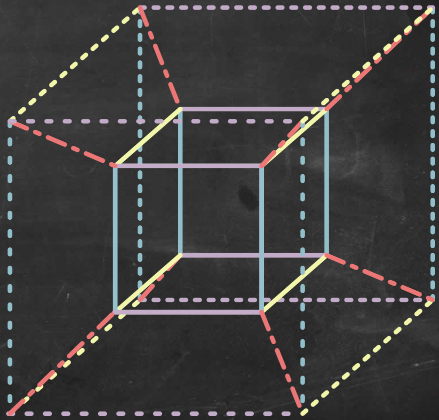
$2^{\mathcal{K}}$

$2^{\mathcal{K}}$



$2^{\mathcal{K}}$





$2^{\mathcal{K}}$

* Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.

$2^{\mathcal{K}}$

* Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.
* Si $\mathcal{K}$ es el n-politopo cruz, $2^{\mathcal{K}}$ es una teselación con n-cubos del n-toro.

$2^{\mathcal{K}}$

* Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.
* Si $\mathcal{K}$ es el n-politopo cruz, $2^{\mathcal{K}}$ es una teselación con n-cubos del n-toro.
* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un $(n+1)$-politopo.

$2^{\mathcal{K}}$

* Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.
* Si $\mathcal{K}$ es el n-politopo cruz, $2^{\mathcal{K}}$ es una teselación con n-cubos del n-toro.
* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un $(n+1)$-politopo.
* Si $\mathcal{K}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es regular.

$2^{\mathcal{K}}$

* Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.
* Si $\mathcal{K}$ es el n-politopo cruz, $2^{\mathcal{K}}$ es una teselación con n-cubos del n-toro.
* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un $(n+1)$-politopo.
* Si $\mathcal{K}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es regular.
* El grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ es $C_2^n \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$.

$2^{\mathcal{K}}$

* Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.
* Si $\mathcal{K}$ es el n-politopo cruz, $2^{\mathcal{K}}$ es una teselación con n-cubos del n-toro.
* Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un $(n+1)$-politopo.
* Si $\mathcal{K}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es regular.
* El grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ es $C_2^n \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$.
* Las i-caras de $2^{\mathcal{K}}$ son de la forma $2^{\mathcal{F}}$ para $\mathcal{F}$ una $(i-1)$-cara de $\mathcal{K}$.

$2^{\mathcal{K}}$

- Si $\mathcal{K}$ es el n-simplejo, $2^{\mathcal{K}}$ es el $(n+1)$-cubo.
- Si $\mathcal{K}$ es el n-politopo cruz, $2^{\mathcal{K}}$ es una teselación con n-cubos del n-toro.
- Si $\mathcal{K}$ es un n-politopo, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un $(n+1)$-politopo.
- Si $\mathcal{K}$ es regular, entonces $2^{\mathcal{K}}$ es regular.
- El grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ es $C_2^n \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$.
- Las i-caras de $2^{\mathcal{K}}$ son de la forma $2^{\mathcal{F}}$ para $\mathcal{F}$ una $(i-1)$-cara de $\mathcal{K}$.
- Las figuras de vértice de $2^{\mathcal{K}}$ son isomorfas a $\mathcal{K}$.

¡Tenemos un teorema más padre!

¡Tenemos un teorema más padre!

Teorema
Si $\mathcal{K}$ es un politopo regular, entonces $\left(2^{\mathcal{K}^*}\right)^*$ es una extensión regular de $\mathcal{K}$.

¡Tenemos un teorema más padre!

Teorema

Si $\mathcal{K}$ es un politopo regular, entonces $\left(2^{\mathcal{K}^*}\right)^*$ es una extensión regular de $\mathcal{K}$.

El problema de extensiones regulares tiene solución para todos los politopos regulares.

Extensiones regulares de politopos

* E. Schulte, L, Danzer: $2^{\mathcal{K}}$ (1984).

Extensiones regulares de politopos

- E. Schulte, L, Danzer: $2^{\mathcal{K}}$ (1984).
- E. Schulte: Extensión regular con "hexágonos" en lugar de "cuadrados" (1985)

Extensiones regulares de politopos

* E. Schulte, L, Danzer: $2^{\mathcal{K}}$ (1984).
* E. Schulte: Extensión regular con "hexágonos" en lugar de "cuadrados" (1985)
* E. Schulte: Extensión universal con infinitágonos (1985).

Extensiones regulares de politopos

* E. Schulte, L, Danzer: $2^{\mathcal{K}}$ (1984).
* E. Schulte: Extensión regular con "hexágonos" en lugar de "cuadrados" (1985)
* E. Schulte: Extensión universal con infinitágonos (1985).
* Daniel Pellicer: Extensiones regulares con 2s-ágonos (2009)

Bueno... ¿y yo qué?

Problemas de extensiones quirales de politopos abstractos.

Bueno... ¿y yo qué?

Problemas de extensiones quirales de politopos abstractos.

* Egon Schulte, A. Weiss: Extensiones quirales universales de politopos quirales (1995).

Bueno... ¿y yo qué?

Problemas de extensiones quirales de politopos abstractos.

* Egon Schulte, A. Weiss: Extensiones quirales universales de politopos quirales (1995).
* G. Conningham y D. Pellicer: Existencia de extensiones quirales finitas para politopos quirales (2014)

Bueno... ¿y yo qué?

Problemas de extensiones quirales de politopos abstractos.

* Egon Schulte, A. Weiss: Extensiones quirales universales de politopos quirales (1995).
* G. Conningham y D. Pellicer: Existencia de extensiones quirales finitas para politopos quirales (2014)
* No mucho más...

¡Gracias!