Poliedros Regulares en Pantalla de Videojuegos Parte 2

Antonio Montero [1]
Asesor: Daniel Pellicer [2]

[1]FCFM-UMSNH

[2]CCM-UNAM

Seminario de Matemáticas Discretas
13 de febrero de 2013

Recordatorio...

... lo que a ustedes ya se les olvidó

- Un poliedro $\mathcal{P}$ es un objeto combinatorio...

Recordatorio...

... lo que a ustedes ya se les olvidó

- Un poliedro $\mathcal{P}$ es un objeto combinatorio...
- Un automorfismo de $\mathcal{P}$ es una biyección de $\mathcal{P}$ en sí mismo que preserva el orden.

Recordatorio...

... lo que a ustedes ya se les olvidó

- Un poliedro $\mathcal{P}$ es un objeto combinatorio...
- Un automorfismo de $\mathcal{P}$ es una biyección de $\mathcal{P}$ en sí mismo que preserva el orden.
- $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$.

Recordatorio...

... lo que a ustedes ya se les olvidó

- Un poliedro $\mathcal{P}$ es un objeto combinatorio...
- Un automorfismo de $\mathcal{P}$ es una biyección de $\mathcal{P}$ en sí mismo que preserva el orden.
- $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de automorfismos de $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}$ es regular si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en banderas.

Recordatorio...

... algo que a mí se me había olvidado

Teorema

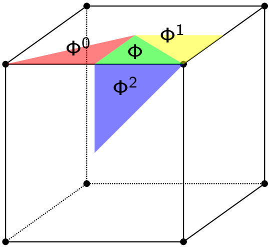
Un poliedro $\mathcal{P}$ es regular si y sólo si para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, 1, 2\}$ existe un automorfismo ρ_i de $\mathcal{P}$ tal que

$$\rho_i(\Phi) = \Phi^i.$$

Además, cada automorfismo ρ_i es una involución, es decir, $\rho_i^2 = Id$.

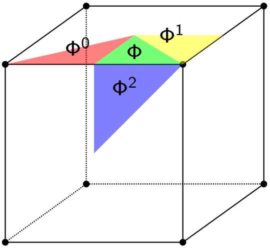
Recordatorio...

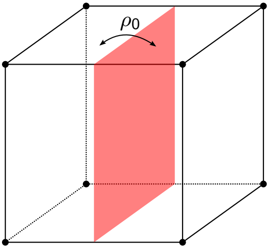
... algo que a mí se me había olvidado



Recordatorio...

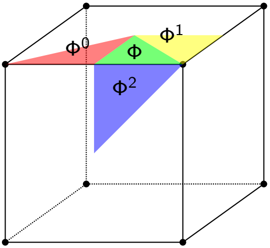
... algo que a mí se me había olvidado

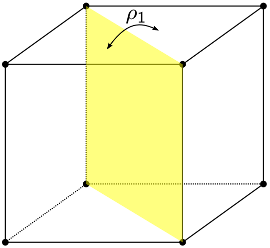




Recordatorio...

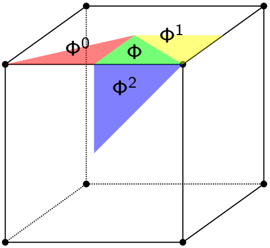
... algo que a mí se me había olvidado

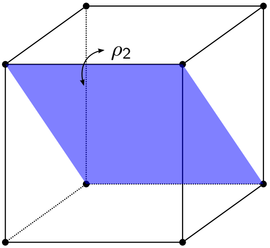




Recordatorio...

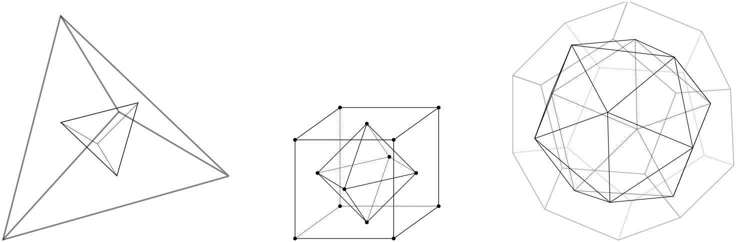
... algo que a mí se me había olvidado





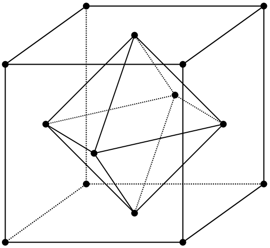
Recordatorio...

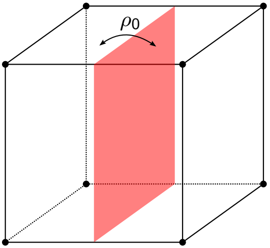
Poliedros Duales



Recordatorio...

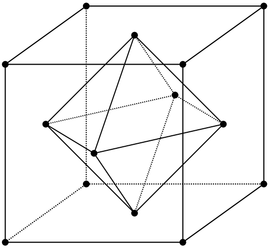
Poliedros Duales

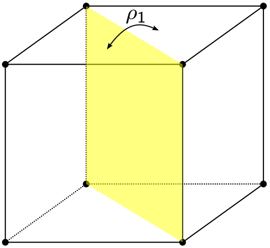




Recordatorio...

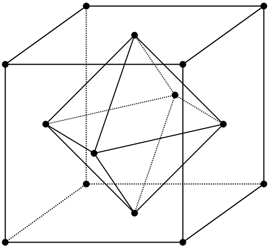
Poliedros Duales

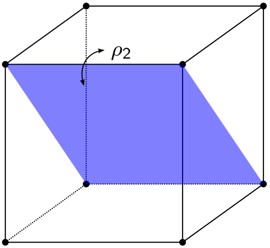




Recordatorio...

Poliedros Duales





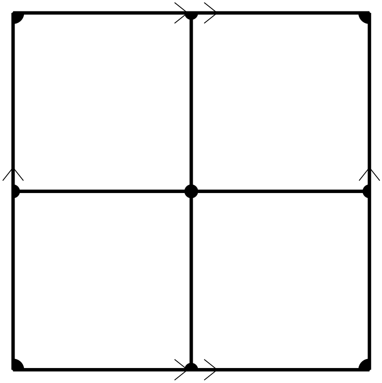
Recordatorio...

... más de lo que a ustedes ya se les olvidó

Una realización de $\mathcal{P}$ es una función $\beta : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{R}^3$ de tal forma que todo automorfismo de $\mathcal{P}$ induce una permutación de $\beta(\mathcal{P}_0)$ que se extiende a una isometría de $\mathbb{R}^3$.

Recordatorio...

... más de lo que a ustedes ya se les olvidó



Recordatorio...

... más de lo que a ustedes ya se les olvidó

Si $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ es un grupo de traslaciones con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linealmente independientes definimos el 3-toro generado por τ como

$$\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{R}^3/\tau = \{[x]_\tau : x \in \mathbb{R}^3\}$$

Recordatorio...

... más de lo que a ustedes ya se les olvidó

Si $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ es un grupo de traslaciones con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linealmente independientes definimos el 3-toro generado por τ como

$$\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{R}^3/\tau = \{[x]_\tau : x \in \mathbb{R}^3\}$$

Definimos la métrica e_τ en $\mathbb{T}^3_\tau$ por:

$$e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) = \inf\{e(t_1(x), t_2(y)) : t_1, t_2 \in \tau\}.$$

El problema:

Decidir para qué grupos τ generados por 3 traslaciones linealmente independientes un poliedro regular $\mathcal{P}$ realizado en $\mathbb{R}^3$ tiene realización en $\mathbb{T}^3_\tau = \mathbb{R}^3/\tau$.

¿Cuándo se portan bien las isometrías?

Proposición

Si g es isometría de $\mathbb{R}^3$, g induce una isometría $\hat{g}$ de $\mathbb{T}^3$ si y sólo si $g \in \mathcal{N}(\tau)$, el normalizador de τ en Isom$(\mathbb{R}^3)$.

Latices de puntos

Si $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ es un grupo generado por tres traslaciones linealmente independientes la latiz de puntos asociada a τ, denotada por Λ_τ, es el conjunto

$$\Lambda_\tau = [0]_\tau = \{mv_1 + nv_2 + kv_3 : m, n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Latices de puntos

Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau =$

Latices de puntos

Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.

Latices de puntos

Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,0)}$.

Latices de puntos

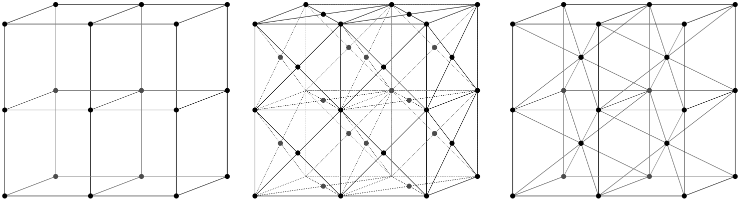
Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,1),(2,0,0),(0,2,0)\rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,1)}$.

Latices de puntos

Ejemplos

- Si $\tau = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}^3 = \Lambda_{(1,0,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,0)}$.
- Si $\tau = \langle (1,1,1),(2,0,0),(0,2,0) \rangle$ entonces $\Lambda_\tau = \Lambda_{(1,1,1)}$.



(a) $\Lambda_{(1,0,0)}$ (b) $\Lambda_{(1,1,0)}$ (c) $\Lambda_{(1,1,1)}$

¿Cuándo las isometrías se portan bien con las latices?

Proposición

Sean τ *un grupo de traslaciones generado por 3 traslaciones linealmente independientes,* $g \in Isom(\mathbb{R}^3)$*. Entonces* $g \in \mathcal{N}(\tau)$ *si y sólo si* g' *preserva a* Λ_τ*.*

Latices Invariantes Bajo Reflexiones

Proposición

Sean Λ *una latiz asociada a un grupo* τ. *Si* Π *un plano tal que* Λ *es invariante bajo la reflexión con respecto a* Π, *entonces existen dos vectores linealmente independientes* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *de tal forma que si* $q \in \Lambda \cap \Pi$, *entonces* $\Lambda \cap \Pi = q + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

Latices Invariantes Bajo Reflexiones

Proposición

Sean Λ una latiz de un grupo τ y Π un plano tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π.

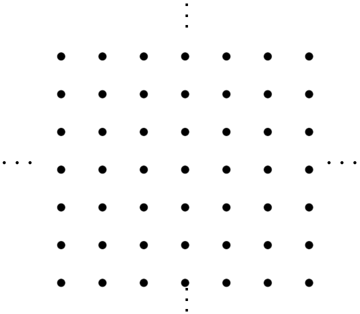
- *Si $\pi(\Lambda) = \Lambda \cap \Pi$, entonces existe un vector $\vec{w} \in \Lambda$ ortogonal a Π tal que $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w} \rangle$ donde $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \Lambda \cap \Pi$.*
- *Si $\pi(\Lambda) \neq \Lambda \cap \Pi$ entonces existen un vector $\vec{w} \in \Lambda$ ortogonal a Π tal que el índice de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w} \rangle$ en Λ es 2.*

Latices Invariantes Bajo Reflexiones

En resumen:

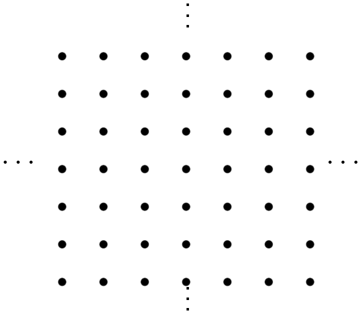
Si Λ es una latiz asociada a un grupo τ y Π un plano tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π, con $\Lambda \cap \Pi \neq \emptyset$, entonces todo punto de Λ se proyecta o bien en un punto de $\Lambda \cap \Pi$ o bien en el punto medio de dos puntos de $\Lambda \cap \Pi$.

Un poco de simbología

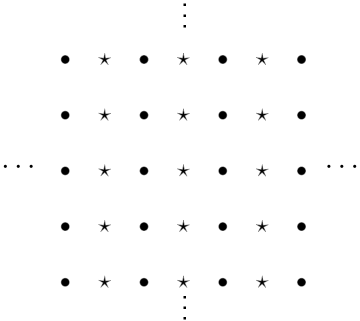


(a) Proyección de $\Lambda_{(1,0,0)}$ en el plano $x = 0$.

Un poco de simbología

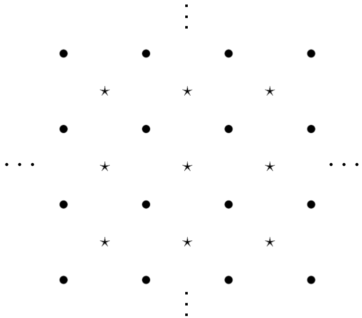


(a) Proyección de $\Lambda_{(1,0,0)}$ en el plano $x = 0$.



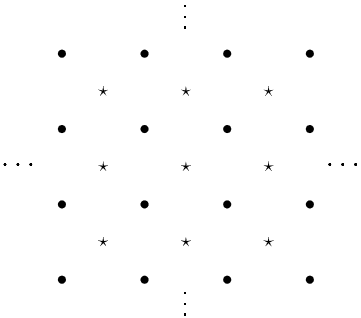
(b) Proyección de $\Lambda_{(1,0,0)}$ en el plano $x = y$.

Un poco de simbología

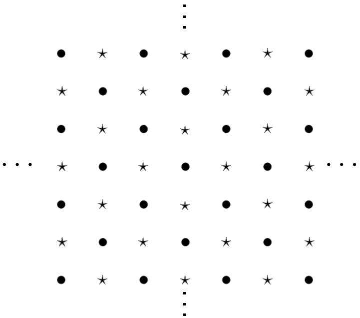


(c) Proyección de $\Lambda_{(1,1,1)}$ en el plano $x = 0$.

Un poco de simbología

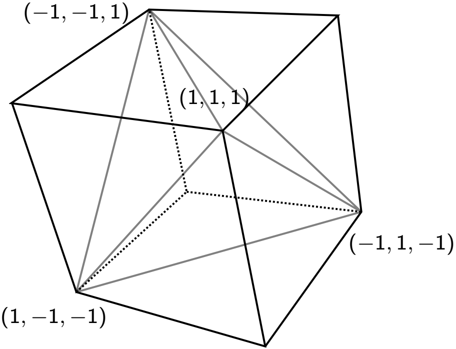


(c) Proyección de $\Lambda_{(1,1,1)}$ en el plano $x = 0$.

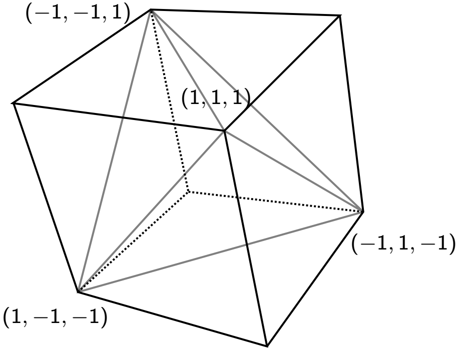


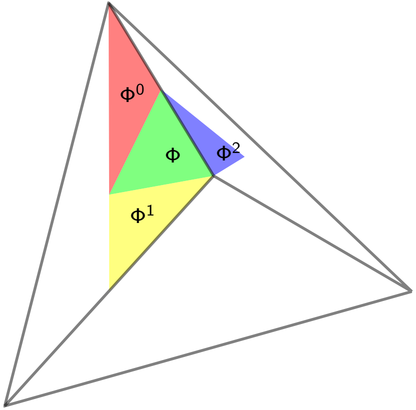
(d) Proyección de $\Lambda_{(1,1,0)}$ en el plano $y = 0$.

Pensemos en el tetraedro...

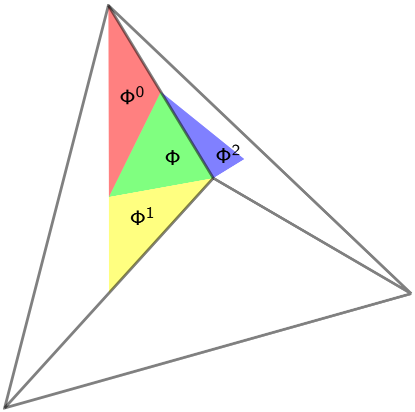


Pensemos en el tetraedro...

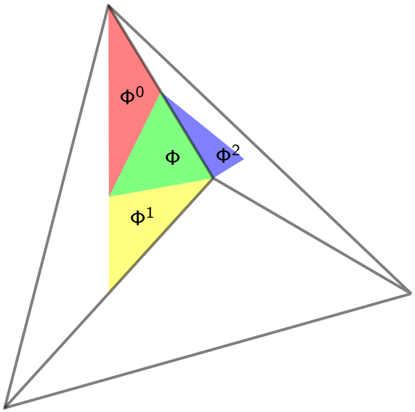


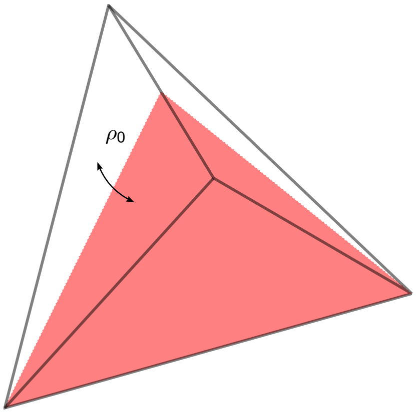


Pensemos en el tetraedro...

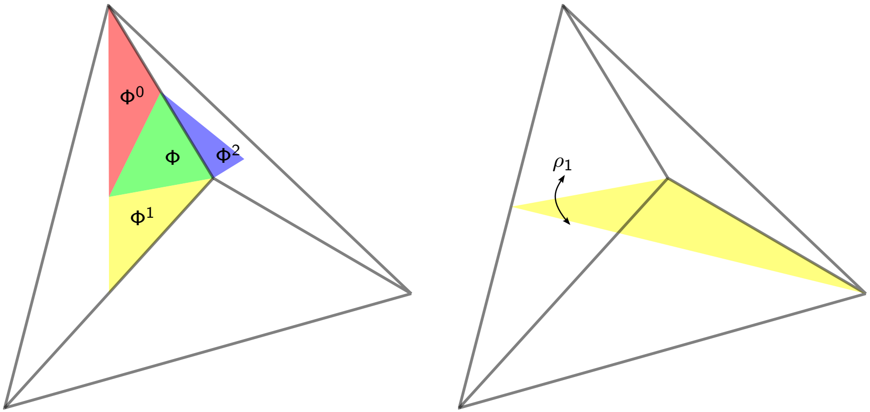


Pensemos en el tetraedro...

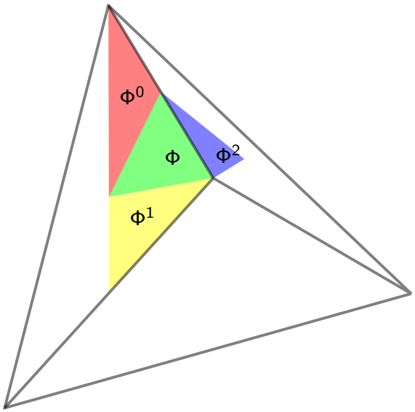


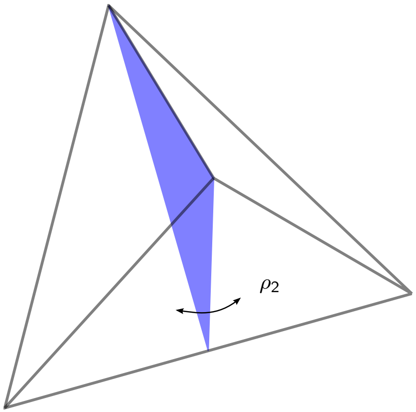


Pensemos en el tetraedro...



Pensemos en el tetraedro...

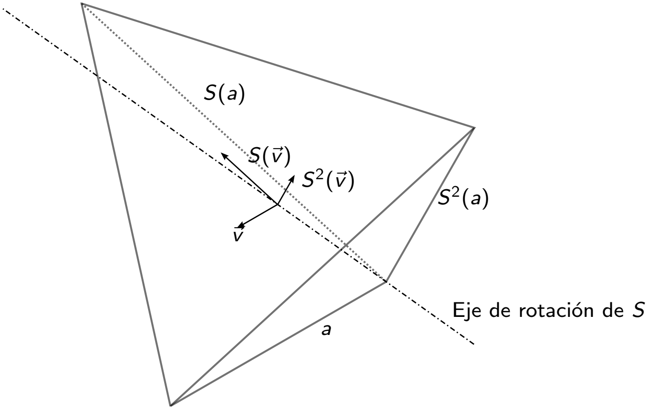




Pensemos en el tetraedro

Sean ρ_0, ρ_1 y ρ_2 las reflexiones generadoras de $\Gamma(\mathcal{T})$ descritas antes, y $S = \rho_2\rho_1$ una rotación del tetraedro $\mathcal{T}$. Si v_2 es un vector ortogonal al plano Π_2, el plano de reflexión de ρ_2, entonces los puntos $0, v_2, S(v_2)$ y $S^2(v_2)$ forman los vértices de un tetraedro regular $\mathcal{T}'$.

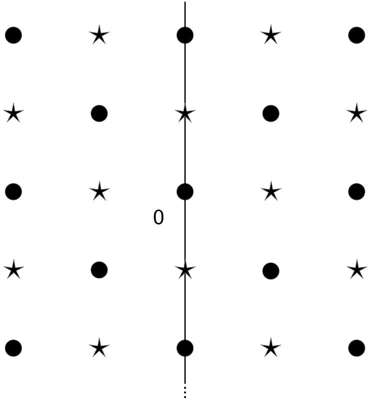
Pensemos en el tetraedro



Pensemos en el tetraedro

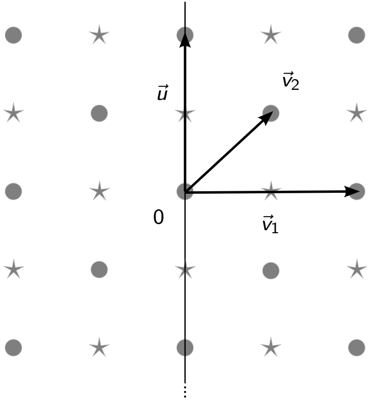
Si Λ es una latiz que queda invariante bajo $\Gamma(\mathcal{T})$ entonces $\pi_i(\Lambda) \neq \Pi_i \cap \Lambda$ para $i \in \{0, 1, 2\}$.

Un análisis en el tetraedro



$\Pi_0 \cap \Pi_2$

Un análisis en el tetraedro



$\Pi_0 \cap \Pi_2$

Todos los del tetraedro

Teorema

Sea τ un grupo generado por tres traslaciones linealmente independientes. El tetraedro regular $\mathcal{T}$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 3c > 1\}.$$

El Cubo

- $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{C})$.

El Cubo

- $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{C})$.
- Toda latiz preservada por $\Gamma(\mathcal{C})$ debe ser preservada por $\Gamma(\mathcal{T})$.

El Cubo

- $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{C})$.
- Toda latiz preservada por $\Gamma(\mathcal{C})$ debe ser preservada por $\Gamma(\mathcal{T})$.
- $\Gamma(\mathcal{C})$ preserva a todas las que $\Gamma(\mathcal{T})$ preserva.

Todas las del cubo

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El octaedro regular admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 3c > 1\}.$$

¿Y qué pasó con el icosaedro?

No mucho:

Teorema

Si $\mathcal{P}$ es un poliedro de la familia del icosaedro, entonces no existe τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes de tal forma que $\mathcal{P}$ tenga realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.

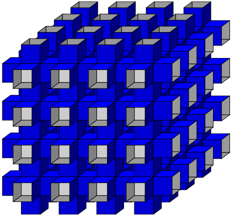
¿Y qué pasó con el icosaedro?

No mucho:

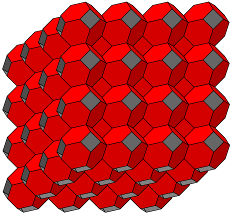
Teorema

Sea τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes. Si G es un grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$ que deja invariante a Λ_τ, entonces G no tiene rotaciones de orden distinto a 2, 3, 4 o 6.

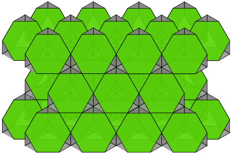
¿Y los de Petrie-Coxeter?



(a) $\mathcal{PC}_1$



(b) $\mathcal{PC}_2$



(c) $\mathcal{PC}_3$

¿Y los de Petrie-Coxeter

- $\mathcal{PC}_1$ y $\mathcal{PC}_2$ son duales, así que $\Gamma(\mathcal{PC}_1) = \Gamma(\mathcal{PC}_2)$.

¿Y los de Petrie-Coxeter

- $\mathcal{PC}_1$ y $\mathcal{PC}_2$ son duales, así que $\Gamma(\mathcal{PC}_1) = \Gamma(\mathcal{PC}_2)$.
- $\Gamma(\mathcal{C}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$, por lo tanto toda latiz preservada por $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$ debe ser preservada por $\Gamma(\mathcal{C})$.

¿Y los de Petrie-Coxeter

- $\mathcal{PC}_1$ y $\mathcal{PC}_2$ son duales, así que $\Gamma(\mathcal{PC}_1) = \Gamma(\mathcal{PC}_2)$.
- $\Gamma(\mathcal{C}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$, por lo tanto toda latiz preservada por $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$ debe ser preservada por $\Gamma(\mathcal{C})$.
- $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$ preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$.

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. Los poliedros $\mathcal{PC}_1$ y $\mathcal{PC}_2$ admiten realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{4a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

¿Y los de Petrie-Coxeter

- $\Gamma(cT) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$, por lo tanto toda latiz preservada por $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$ debe ser preservada por $\Gamma(\mathcal{T})$.

¿Y los de Petrie-Coxeter

- $\Gamma(cT) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$, por lo tanto toda latiz preservada por $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$ debe ser preservada por $\Gamma(\mathcal{T})$.
- $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$ preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$.

Teorema

Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro $\mathcal{PC}_3$ admite realización en $\mathbb{T}^3_\tau$ si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{8a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

¿Qué hicimos?

- Estudiamos las latices invariantes bajo una reflexión.

¿Qué hicimos?

- Estudiamos las latices invariantes bajo una reflexión.
- Con ayuda de éstas determinamos los grupos τ para los cuales los poliedros regulares finitos (18) realizados en $\mathbb{R}^3$ admiten realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.

¿Qué hicimos?

- Estudiamos las latices invariantes bajo una reflexión.
- Con ayuda de éstas determinamos los grupos τ para los cuales los poliedros regulares finitos (18) realizados en $\mathbb{R}^3$ admiten realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.
- Gracias a las relaciones entre los grupos de simetrías de los poliedros de Petrie-Coxeter y los grupos de simetría de los poliedros finitos, determinamos los grupos τ para los cuales los poliedros de Petrie-Coxeter (3) y sus Petriales (3) admiten realización en $\mathbb{T}^3_\tau$.

¿Qué queda por hacer?

- Completar las lista de los 48.

¿Qué queda por hacer?

- Completar las lista de los 48.
- Completar la lista saltandose la realización en $\mathbb{R}^3$.

¿Qué queda por hacer?

- Completar las lista de los 48.
- Completar la lista saltandose la realización en $\mathbb{R}^3$.
- Explorar otras 3-variedades.

¡Gracias!