Coloración en Gráficas Infinitas

José Antonio Montero Aguilar

Seminario de Matemáticas Discretas
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas - UMSNH

31 de agosto de 2012

Menú:

Entrada

Una gráfica infinita agridulce

Plato Fuerte

Algunos sabores extranjeros

Algo más hogareño

El Postre

¿Qué pasó con el plano?

Un puño de definiciones...

...que ya todo mundo se debe de saber

- Una buena coloración de una gráfica $\mathcal{G} = (V, A)$ es una función $f : V \to I$ tal que si $\{u, v\} \in A$ entonces $f(u) \neq f(v)$.

Un puño de definiciones...

...que ya todo mundo se debe de saber

- Una buena coloración de una gráfica $\mathcal{G} = (V, A)$ es una función $f : V \to I$ tal que si $\{u, v\} \in A$ entonces $f(u) \neq f(v)$.
- El número cromático $\chi(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ es el menor *cardinal* κ tal que existe $f : V \to I$ buena coloración de $\mathcal{G}$ y $|I| = \kappa$.

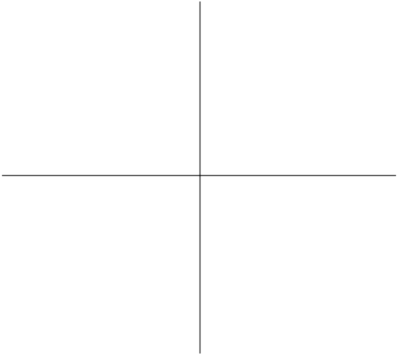
Una Gráfica Infinita

Consideremos $\mathcal{U}^2 = (V, A)$ como sigue:

Una Gráfica Infinita

Consideremos $\mathcal{U}^2 = (V, A)$ como sigue:

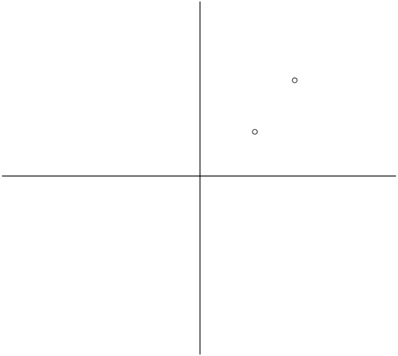
$$V = \mathbb{R}^2$$



Una Gráfica Infinita

Consideremos $\mathcal{U}^2 = (V, A)$ como sigue:

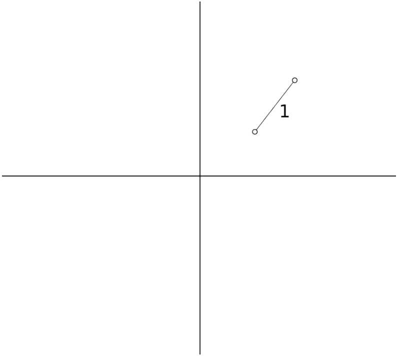
$$V = \mathbb{R}^2 \qquad \{x, y\} \in A$$



Una Gráfica Infinita

Consideremos $\mathcal{U}^2 = (V, A)$ como sigue:

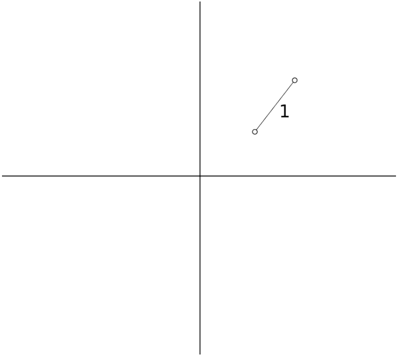
$$V = \mathbb{R}^2 \qquad \{x, y\} \in A \Leftrightarrow \mathrm{dist}(x, y) = 1$$



Una Gráfica Infinita

Consideremos $\mathcal{U}^2 = (V, A)$ como sigue:

$$V = \mathbb{R}^2 \qquad \{x, y\} \in A \Leftrightarrow \mathrm{dist}(x, y) = 1$$



$\mathcal{U}^2$ se llama Gráfica de Distancia Unitaria.

Una Gráfica Infinita

En 1950 Edward Nelson preguntó:

$$¿\text{Cuánto valdrá } \chi(\mathcal{U}^2)?$$

Una Gráfica Infinita

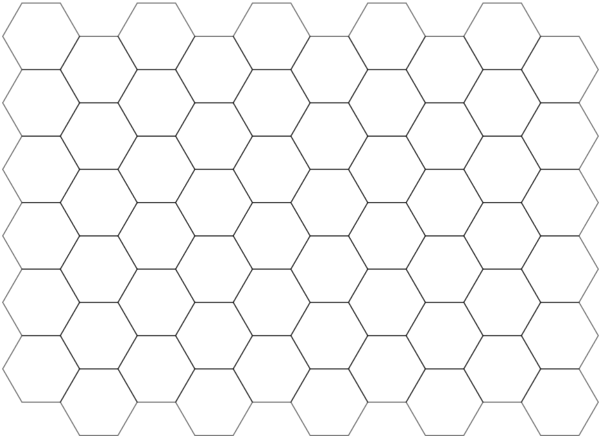
¿Cuánto valdrá $\chi(\mathcal{U}^2)$?

Proposición

$$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$$

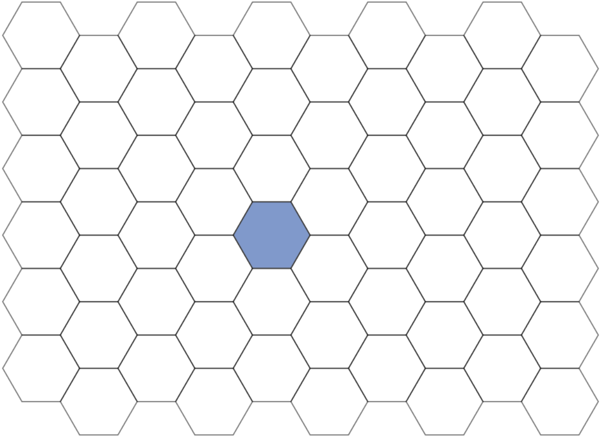
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



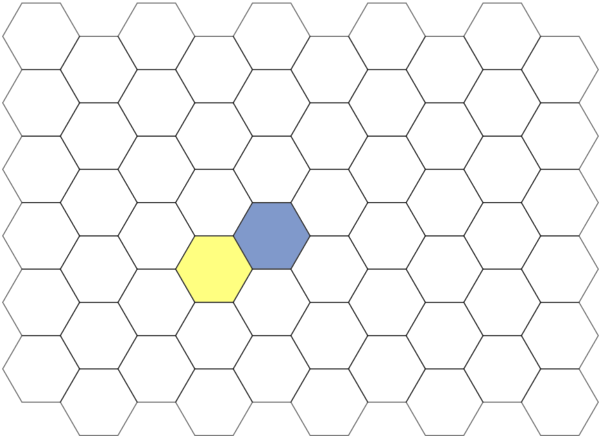
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



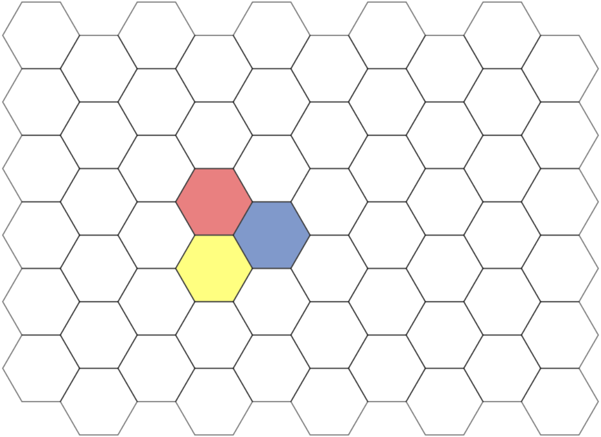
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



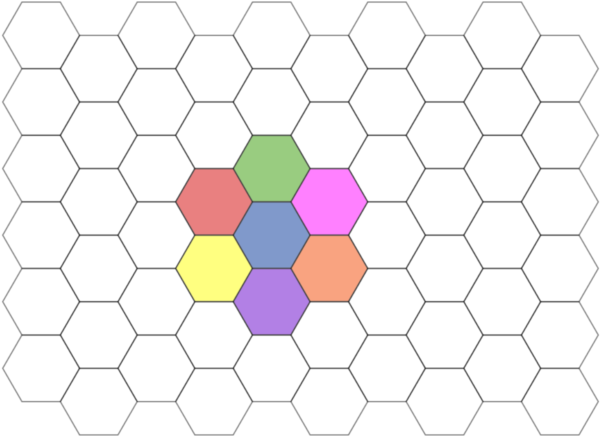
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



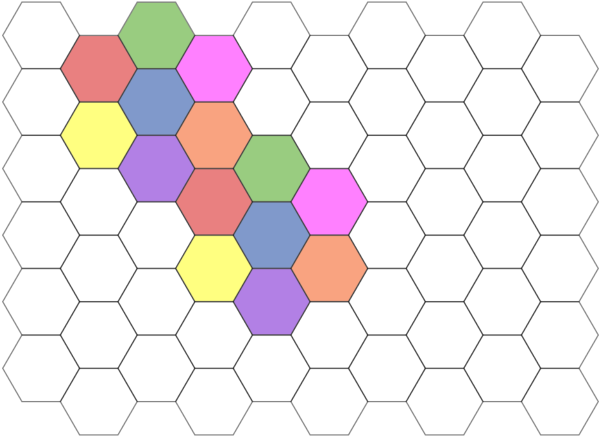
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración

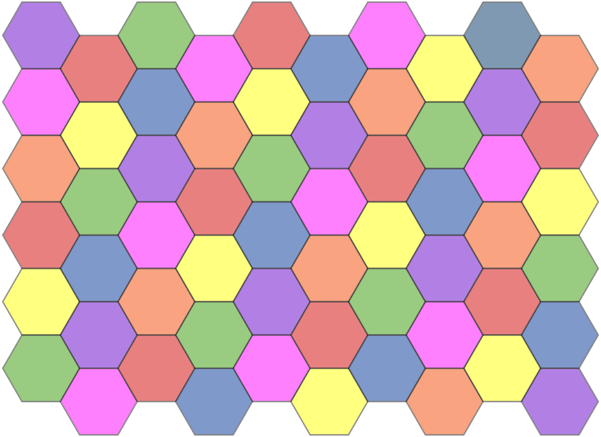


$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración

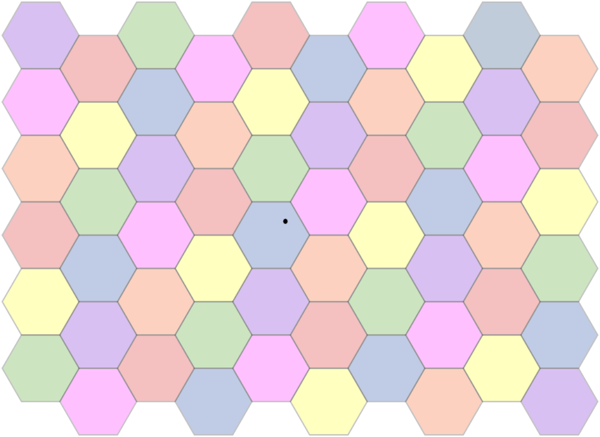


$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$
Demostración



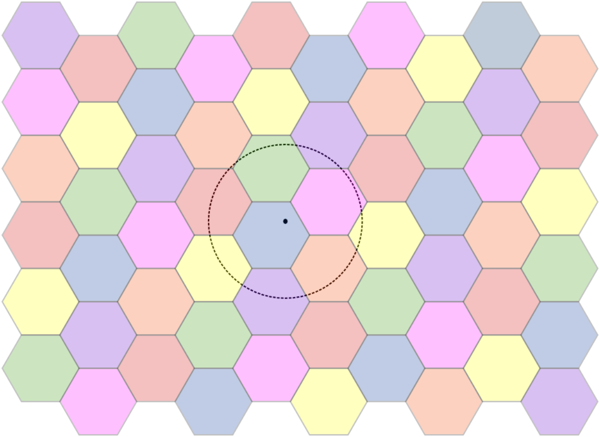
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



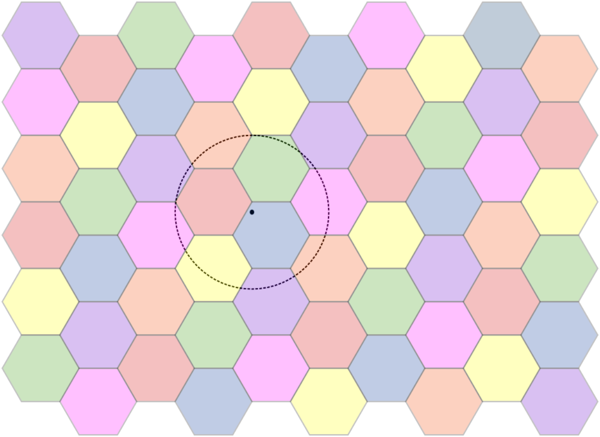
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



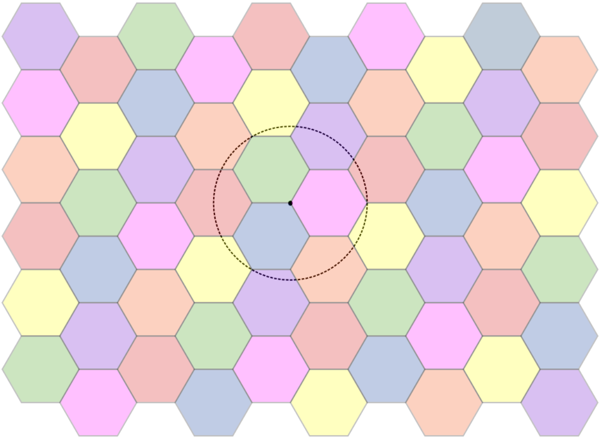
$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



$\chi(\mathcal{U}^2) \leq 7$

Demostración



Una Gráfica Infinita

¿Cuánto valdrá $\chi(\mathcal{U}^2)$?

Proposición

$$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$$

$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

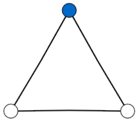
Demostración

$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración

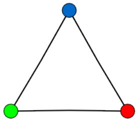
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



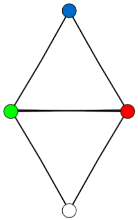
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



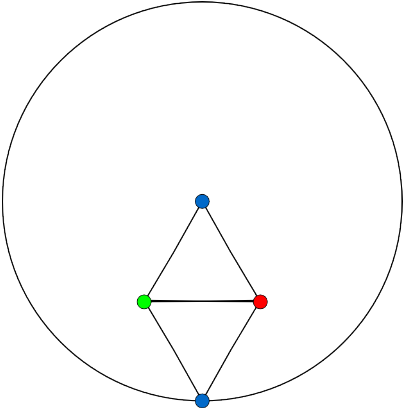
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



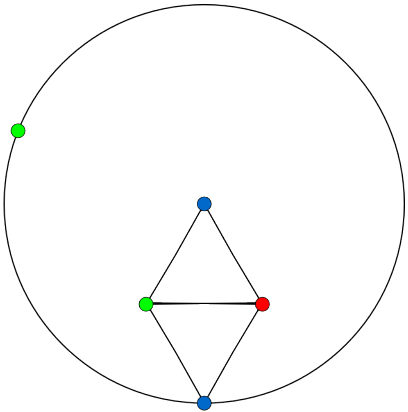
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



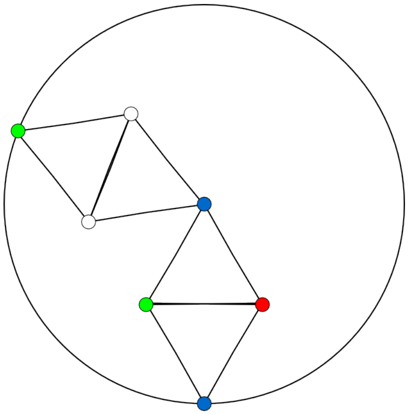
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



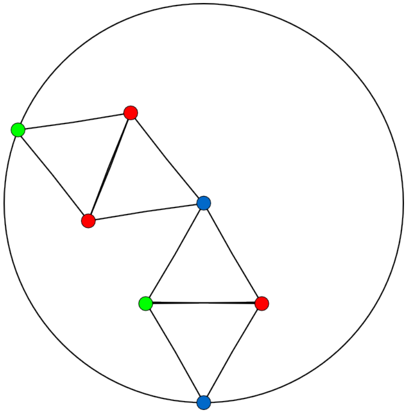
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



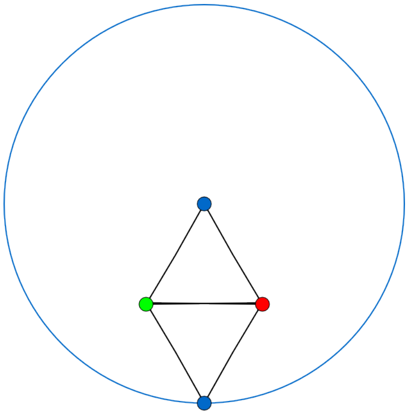
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



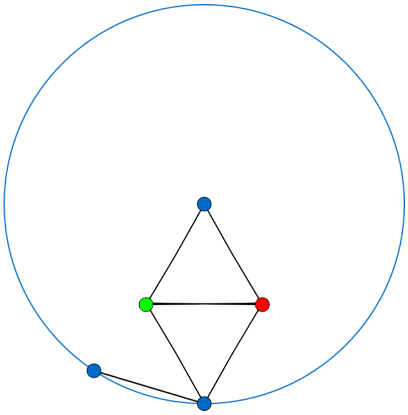
$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



$\chi(\mathcal{U}^2) > 3$

Demostración



$\chi(\mathcal{U}^2)$
¿Qué más se sabe?

No mucho ☹

$\chi(\mathcal{U}^2)$

¿Qué más se sabe?

No mucho ☹

- En el caso general se sabe que $\chi(\mathcal{U}^2) \in \{4, 5, 6\}$.

$\chi(\mathcal{U}^2)$
¿Qué más se sabe?

No mucho ☹

- En el caso general se sabe que $\chi(\mathcal{U}^2) \in \{4, 5, 6\}$.
- Se conocen algunos resultados bajo condiciones adicionales para las clases cromáticas.

$\chi(\mathcal{U}^2)$

¿Qué más se sabe?

No mucho ☹

- En el caso general se sabe que $\chi(\mathcal{U}^2) \in \{4, 5, 6\}$.
- Se conocen algunos resultados bajo condiciones adicionales para las clases cromáticas.
- K.J. Falconer, 1981: Si las clases cromáticas son Lebesgue-medibles $\chi(\mathcal{U}^2) \geq 5$.

$\chi(\mathcal{U}^2)$
¿Qué más se sabe?

No mucho ☹

- En el caso general se sabe que $\chi(\mathcal{U}^2) \in \{4, 5, 6\}$.
- Se conocen algunos resultados bajo condiciones adicionales para las clases cromáticas.
- K.J. Falconer, 1981: Si las clases cromáticas son Lebesgue-medibles $\chi(\mathcal{U}^2) \geq 5$.
- Erdös y de-Burgin, 1951: $\chi(\mathcal{U}^2)$ se alcanza en alguna gráfica finita.

¿Y entonces?

El resultado de Erdös y de-Burgin depende del *Axioma de Elección* (**AC**).

¿Y entonces?

El resultado de Erdös y de-Burgin depende del *Axioma de Elección* (**AC**).

¿Qué pasa si no tengo elección?

¿Y entonces?

El resultado de Erdös y de-Burgin depende del *Axioma de Elección* (**AC**).

¿Qué pasa si no tengo elección?

... la cosa puede cambiar radicalmente...

Menú:

Entrada
Una gráfica infinita agridulce

Plato Fuerte
Algunos sabores extranjeros
Algo más hogareño

El Postre
¿Qué pasó con el plano?

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

- *Axioma de Elección* (**AC**): Toda familia Ψ de conjuntos no vacíos tiene función de elección, es decir una función f tal que $f(S) \in S$ para cada $S \in \Psi$.

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

- *Axioma de Elección* (**AC**): Toda familia Ψ de conjuntos no vacíos tiene función de elección, es decir una función f tal que $f(S) \in S$ para cada $S \in \Psi$.
- *Axioma de Elección Numerable* ($\mathbf{AC}_{\aleph_0}$): Toda familia *numerable* Φ de conjuntos no vacíos tiene función de elección, es decir una función f tal que $f(S) \in S$ para cada $S \in \Phi$.

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

- *Axioma de Elección* (**AC**): Toda familia Ψ de conjuntos no vacíos tiene función de elección, es decir una función f tal que $f(S) \in S$ para cada $S \in \Psi$.
- *Axioma de Elección Numerable* ($\mathbf{AC}_{\aleph_0}$): Toda familia *numerable* Φ de conjuntos no vacíos tiene función de elección, es decir una función f tal que $f(S) \in S$ para cada $S \in \Phi$.
- $\mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{AC}_{\aleph_0}$ pero no al revés.

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

- *Axioma de Lebesgue* (**LM**): Todo subconjunto de reales es Lebesgue medible.

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

- *Axioma de Lebesgue* (**LM**): Todo subconjunto de reales es Lebesgue medible.
- **ZF** los axiomas de Zermelo-Fraenkel y **ZFC** es **ZF** + **AC**.

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

- *Axioma de Lebesgue* (**LM**): Todo subconjunto de reales es Lebesgue medible.
- **ZF** los axiomas de Zermelo-Fraenkel y **ZFC** es **ZF** + **AC**.
- **ZFC** + **LM** es inconsistente, pero $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ alcanza para la *Teoría clásica de Lebesgue*.

Unos sabores extranjeros...

...directos de Conjuntolandia

Teorema (Solovay, 1970)

$\mathbf{ZF} + \mathbf{LM} + \mathbf{AC}_{\aleph_0}$ *es consistente.*

Otra gráfica infinita

Construyamos $\mathcal{G}_1 = (V_1, A_1)$ como sigue:

$$V_1 = \mathbb{R}$$

Otra gráfica infinita

Construyamos $\mathcal{G}_1 = (V_1, A_1)$ como sigue:

$$V_1 = \mathbb{R}$$

$$\{s, t\} \in A_1$$

siempre que

$$s - t - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

Otra gráfica infinita

Construyamos $\mathcal{G}_1 = (V_1, A_1)$ como sigue:

$$V_1 = \mathbb{R}$$

$$\{s, t\} \in A_1$$

siempre que

$$s - t - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

ó

$$t - s - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$\chi(\mathcal{G}_1)$
En **ZFC**

Proposición

En **ZFC**, $\chi(\mathcal{G}_1) = 2$

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{q + n\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q} \; n \in \mathbb{Z}\}$.

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{q + n\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- Definimos $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$.

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{q + n\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- Definimos $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$.
- Sea Y un conjunto de representantes de $\sim$, y $y(t) \in Y$ con $t \sim y(t)$.

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{q + n\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- Definimos $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$.
- Sea Y un conjunto de representantes de $\sim$, y $y(t) \in Y$ con $t \sim y(t)$.
- $c(t) = l$, $l \in \{0, 1\} \Leftrightarrow$ Existe $n \in \mathbb{Z}$ con

$$t - y(t) - (2n + l)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

es una buena coloración.

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** $+$ **LM** $+$ **AC**$_{\aleph_0}$

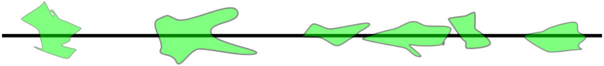
Proposición

En **ZF** $+$ **LM** $+$ **AC**$_{\aleph_0}$, $\chi(\mathcal{G}_1) > \aleph_0$

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.
    - Supongamos que no. Sea A independiente en $\mathcal{G}_1$ tal que $\mu(A) > 0$.

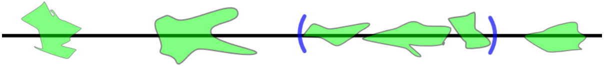


$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.
  - Supongamos que no. Sea A independiente en $\mathcal{G}_1$ tal que $\mu(A) > 0$.
  - Sea I intervalo tal que

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

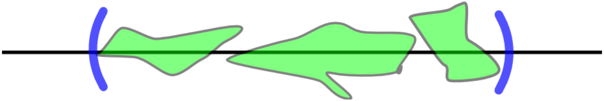


$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.
  - Sea I intervalo tal que

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$



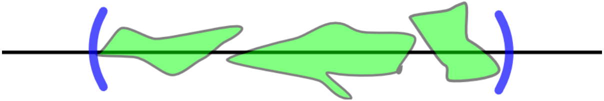
$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.
  - Sea I intervalo tal que

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

  - Sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} < q < \sqrt{2} + \frac{\mu(I)}{10}$



$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

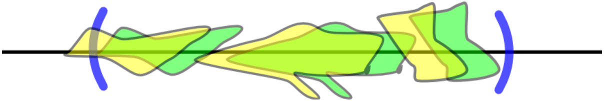
- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.
  - Sea I intervalo tal que

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

  - Sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} < q < \sqrt{2} + \frac{\mu(I)}{10}$
  - Sea $B = A - (q - \sqrt{2}) = \{a - q - \sqrt{2} : a \in A\}$, entonces

$$\frac{\mu(I \cap B)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}$$

.



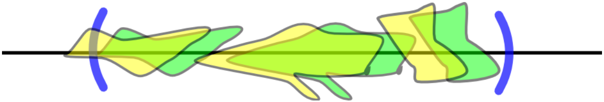
$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

$$\frac{\mu(I \cap B)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}$$



$\chi(\mathcal{G}_1)$

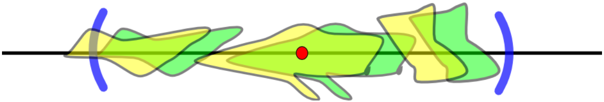
En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

$$\frac{\mu(I \cap B)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}$$

  - $I \cap A \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in I \cap A \cap B$.



$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

$$\frac{\mu(I \cap B)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}$$

  - $I \cap A \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in I \cap A \cap B$.
  - $x \in B$

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En $\mathbf{ZF} + \mathbf{LM} + \mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

$$\frac{\mu(I \cap B)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}$$

  - $I \cap A \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in I \cap A \cap B$.
  - $x \in B \Rightarrow x = y - (q - \sqrt{2}) \qquad y \in A$

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + **AC$_{\aleph_0}$** es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.

$$\frac{\mu(I \cap A)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}$$

$$\frac{\mu(I \cap B)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}$$

- $I \cap A \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in I \cap A \cap B$.
- $x \in B \Rightarrow x = y - (q - \sqrt{2})$ $\quad y \in A \Rightarrow \{x, y\} \in A_1$

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En $\mathbf{ZF} + \mathbf{LM} + \mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.

$\chi(\mathcal{G}_1)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es independiente en $\mathcal{G}_1$ entonces $\mu(A) = 0$.
- Si $f : V_1 \to \mathbb{N}$ es una coloración y $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ son las clases cromáticas, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A_n contiene dos vértices adyacentes en $\mathcal{G}_1$.

Un ejemplo en el plano

Consideremos ahora la gráfica $\mathcal{G}_2 = (V_2, A_2)$ como sigue:

$$V_2 = \mathbb{R}^2$$

Un ejemplo en el plano

Consideremos ahora la gráfica $\mathcal{G}_2 = (V_2, A_2)$ como sigue:

$$V_2 = \mathbb{R}^2$$

$\{s, t\} \in A_2$ si y sólo si

$$s - t - \varepsilon \in \mathbb{Q}^2$$

o bien

$$t - s - \varepsilon \in \mathbb{Q}^2$$

para $\varepsilon = (0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 0)$.

$\chi(\mathcal{G}_2)$
En **ZFC**

Proposición

En **ZFC**, $\chi(\mathcal{G}_2) = 2$

$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{(q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.

$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{(q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.
- Definimos $\sim$ sobre $\mathbb{R}^2$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$.

$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{(q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.
- Definimos $\sim$ sobre $\mathbb{R}^2$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$.
- Sea Y un conjunto de representantes de $\sim$, y $y(t) \in Y$ con $t \sim y(t)$.

$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZFC** es 2. Demostración

- Sea $S = \{(q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.
- Definimos $\sim$ sobre $\mathbb{R}^2$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in S$.
- Sea Y un conjunto de representantes de $\sim$, y $y(t) \in Y$ con $t \sim y(t)$.
- $c(t) = (k_1 + k_2) \mod 2 \Leftrightarrow$ Existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ con

$$t - y(t) - \sqrt{2}(k_1, k_2) \in \mathbb{Q}^2$$

es una buena coloración.

$\chi(\mathcal{G}_2)$
En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$

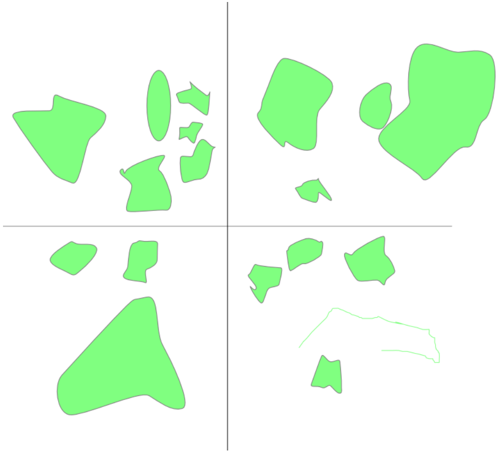
Proposición

En $\mathbf{ZF} + \mathbf{LM} + \mathbf{AC}_{\aleph_0}$, $\chi(\mathcal{G}_2) > \aleph_0$

$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** + **LM** + $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

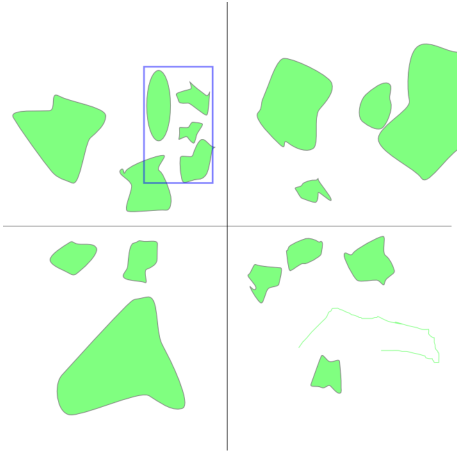
- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.



$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

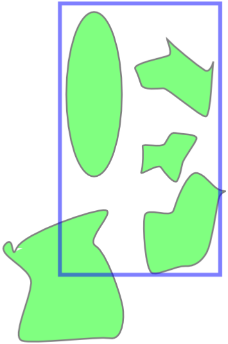
- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.



$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

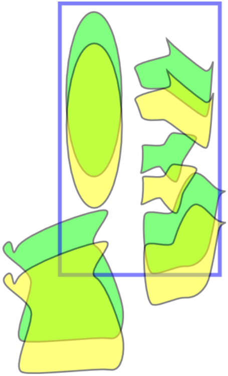
- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.



$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

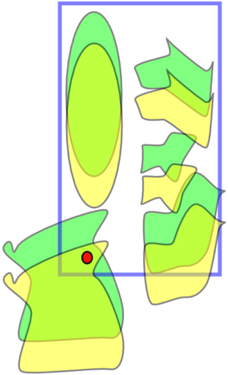
- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.



$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** + **LM** + **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.



$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** $+$ **LM** $+$ **AC**$_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.

$\chi(\mathcal{G}_2)$

En **ZF** + **LM** + $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ es grandote. Demostración

- Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es independiente en $\mathcal{G}_2$ entonces $\mu(A) = 0$.
- Si $f : V_1 \to \mathbb{N}$ es una coloración y $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ son las clases cromáticas, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A_n contiene dos vértices adyacentes en $\mathcal{G}_2$.

Menú:

¿Y el plano?

Teorema (Soifer-Shelah, 2003)

Asumamos que toda subgráfica finita de $\mathcal{U}^2$ tiene número cromático menor igual a 4, entonces:

- *En* **ZFC** *el número cromático de $\mathcal{U}^2$ es 4.*
- *En* $\mathbf{ZF} + \mathbf{LM} + \mathbf{AC}_{\aleph_0}$ *el número cromático de $\mathcal{U}^2$ es 5 o 6.*

¡Gracias!

(por dejarme sobrevivir hasta esta diapositiva)