Una forma "barata" de garantizar triángulos en una gráfica

José Antonio Montero Aguilar   Héctor Manuel Téllez Gómez

Marzo de 2011

Menú:

Motivación

Intuitivamente se ve que si una gráfica G tiene muchas aristas entonces seguramente tendrá un triángulo, y que, por otro lado, si G tiene pocas aristas, difícilmente aparecerá un triángulo.

Motivación

Intuitivamente se ve que si una gráfica G tiene muchas aristas entonces seguramente tendrá un triángulo, y que, por otro lado, si G tiene pocas aristas, difícilmente aparecerá un triángulo.

Uno puede pensar que para poder garantizar la existencia de un tringulo son necesarias muchas aristas.

Motivación

Teorema. (Turán)

Sea G una gráfica con n vértices libre de triángulos, entonces G tiene a lo más $\frac{n^2}{4}$ aristas.

Motivación

Teorema. (Turán)

Sea G una gráfica con n vértices libre de triángulos, entonces G tiene a lo más $\frac{n^2}{4}$ aristas.

¿Qué densidad de aristas por vértices es suficiente para que G tenga un triángulo?

Un poco de Teoría

Probabilidad

Definición.

- *Una Variable Aleatoria* X *sobre un Espacio Muestral* Ω *es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Un poco de Teoría

Probabilidad

Definición.

- *Una Variable Aleatoria* X *sobre un Espacio Muestral* Ω *es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- *Si* X *y* Y *son variables aleatorias sobre* Ω *y* P *es una función de probabilidad, decimos que* X *y* Y *son independientes si* $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Un poco de Teoría

Probabilidad

Definición.

- *Una Variable Aleatoria* X *sobre un Espacio Muestral* Ω *es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- *Si* X *y* Y *son variables aleatorias sobre* Ω *y* P *es una función de probabilidad, decimos que* X *y* Y *son independientes si* $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- *Dada* X *variable aleatoria, la Esperanza o Media* $E(X)$ *(también denotada* μ_X*) es el "promedio" de los valores que toma* X.

Un poco de Teoría
Probabilidad

Definición.

- *La Varianza de* X $Var(X)$ (σ_X^2) *Es una medida arbitraria que crece cuando los valores que toma* X *están alejados de la media y decrece cuando están cercanos.*

Un poco de Teoría

Probabilidad

Definición.

- *La Varianza de* X $Var(X)$ (σ_X^2) *Es una medida arbitraria que crece cuando los valores que toma* X *están alejados de la media y decrece cuando están cercanos.*
- *Dadas* X *y* Y *variables aleatorias la Covarianza de* X *y* Y $Cov(X,Y)$ $(S_{X,Y})$ *es una medida de dispersión que nos dice qué tan relacionadas están* X *y* Y.

Un poco de Teoría
Probabilidad

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias y a es constante:

- $E(a) = a$.

Un poco de Teoría

Probabilidad

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias y a es constante:

- $E(a) = a$.
- $E(aX_i + X_j) = aE(X_i) + E(X_j)$.

Un poco de Teoría
Probabilidad

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias y a es constante:

- $E(a) = a$.
- $E(aX_i + X_j) = aE(X_i) + E(X_j)$.
- $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j)$ si X_i y X_j son independientes.

Un poco de Teoría
Probabilidad

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias y a es constante:

- $E(a) = a$.
- $E(aX_i + X_j) = aE(X_i) + E(X_j)$.
- $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j)$ si X_i y X_j son independientes.
- $Var(X_i) = E[(X_i - \mu_{X_i})^2] = E(X_i^2) - E(X_i)^2$

Un poco de Teoría
Probabilidad

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias y a es constante:

- $E(a) = a$.
- $E(aX_i + X_j) = aE(X_i) + E(X_j)$.
- $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j)$ si X_i y X_j son independientes.
- $Var(X_i) = E[(X_i - \mu_{X_i})^2] = E(X_i^2) - E(X_i)^2$
- $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$

Un poco de Teoría
Probabilidad

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son variables aleatorias y a es constante:

- $E(a) = a$.
- $E(aX_i + X_j) = aE(X_i) + E(X_j)$.
- $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j)$ si X_i y X_j son independientes.
- $Var(X_i) = E[(X_i - \mu_{X_i})^2] = E(X_i^2) - E(X_i)^2$
- $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$
- $Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$

Un poco de Teoría
Gráficas Aleatorias

Definición.

Dados $n \in \mathbb{N}$ *y* $p \in [0,1]$ *definimos una Gráfica Aleatoria* $G_{n,p}$ *como una gráfica con* n *vértices donde cada arista aparece con probabilidad* p.

Un poco de Teoría

Gráficas Aleatorias

Definición.

Dados $n \in \mathbb{N}$ *y* $p \in [0,1]$ *definimos una Gráfica Aleatoria* $G_{n,p}$ *como una gráfica con* n *vértices donde cada arista aparece con probabilidad* p.

Observación.

- *Si* $p = 0$, $G_{n,p}$ *es una gráfica sin aristas.*

Un poco de Teoría

Gráficas Aleatorias

Definición.

Dados $n \in \mathbb{N}$ *y* $p \in [0, 1]$ *definimos una Gráfica Aleatoria* $G_{n,p}$ *como una gráfica con* n *vértices donde cada arista aparece con probabilidad* p.

Observación.

- *Si* $p = 0$, $G_{n,p}$ *es una gráfica sin aristas.*
- *Si* $p = 1$ *entonces* $G_{n,p} = K_n$.

Un poco de Teoría

Gráficas Aleatorias

Definición.

Dados $n \in \mathbb{N}$ *y* $p \in [0,1]$ *definimos una Gráfica Aleatoria* $G_{n,p}$ *como una gráfica con* n *vértices donde cada arista aparece con probabilidad* p.

Observación.

- *Si* $p = 0$, $G_{n,p}$ *es una gráfica sin aristas.*
- *Si* $p = 1$ *entonces* $G_{n,p} = K_n$.
- $E(|A(G_{n,p})|) = p\binom{n}{2}$

El Lema

Desigualdad de Chebyshev

Teorema. (Chebyshev)

Sea X una variable aleatoria y P una función de probabilidad entonces

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2} \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

El Lema

Lema.

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ *una familia de variables aleatorias no negativas de tal forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} = 0$$

El Lema

Lema.

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ *una familia de variables aleatorias no negativas de tal forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} = 0$$

entonces

El Lema

Lema.

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ *una familia de variables aleatorias no negativas de tal forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} = 0$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > 0) = 1$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$P(X_n \leq 0)$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$P(X_n \leq 0) \quad = \quad P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n))$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \end{aligned}$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} \end{aligned}$$

Entonces

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq 0)$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq 0) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2}$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq 0) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} = 0$$

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq 0) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} = 0$$

Por lo tanto

El Lema

Demostración.

Para cada n tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq 0) &= P(X_n - E(X_n) \leq -E(X_n)) \\ &\leq P(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq 0) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(X_n)}{E(X_n)^2} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > 0) = 1$$

★

El Resultado

Teorema.

Sean $p \in [0,1]$, $G_{1,p}, G_{2,p}, \cdots, G_{n,p}, \cdots$ *una familia de gráficas aleatorias y* $P(n)$ *la probabilidad de que* $G_{n,p}$ *tenga un triángulo, entonces*

El Resultado

Teorema.

Sean $p \in [0,1]$, $G_{1,p}, G_{2,p}, \cdots, G_{n,p}, \cdots$ *una familia de gráficas aleatorias y* $P(n)$ *la probabilidad de que* $G_{n,p}$ *tenga un triángulo, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} P(n) = 1$$

El Resultado

Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea T una variable aleatoria que nos dice cuántos triángulos tiene $G_{n,p}$.

El Resultado
Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea T una variable aleatoria que nos dice cuántos triángulos tiene $G_{n,p}$.Sean $T_1, T_2, \cdots, T_{\binom{n}{3}}$ variables aleatorias tales que

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo triángulo aparece} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

El Resultado

Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea T una variable aleatoria que nos dice cuántos triángulos tiene $G_{n,p}$.Sean $T_1, T_2, \cdots, T_{\binom{n}{3}}$ variables aleatorias tales que

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo triángulo aparece} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Observemos que

$$T = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i$$

El Resultado

Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea T una variable aleatoria que nos dice cuántos triángulos tiene $G_{n,p}$.Sean $T_1, T_2, \cdots, T_{\binom{n}{3}}$ variables aleatorias tales que

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo triángulo aparece} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Observemos que

$$T = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i$$

y que

$$E(T_i) = P(T_i = 1) = p^3$$

El Resultado
Demostración

Calculemos $Var(T)$:

$$Var(T)$$

El Resultado
Demostración

Calculemos $Var(T)$:

$$Var(T) = Var(\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i)$$

El Resultado

Demostración

Calculemos $Var(T)$:

$$
\begin{aligned}
Var(T) &= Var(\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) + \sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j)
\end{aligned}
$$

Calculemos por separado

$$
\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j)
$$

El Resultado
Demostración

Para cada i tenemos:

$$Var(T_i)$$

El Resultado

Demostración

Para cada i tenemos:

$$Var(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2$$

El Resultado
Demostración

Para cada i tenemos:

$$Var(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2 = p^3$$

El Resultado

Demostración

Para cada i tenemos:

$$Var(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2 = p^3 - p^6$$

El Resultado
Demostración

Para cada i tenemos:

$$Var(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2 = p^3 - p^6 \leq p^3$$

El Resultado

Demostración

Para cada i tenemos:

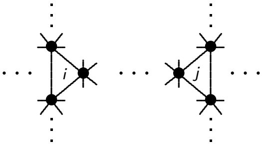
$$Var(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2 = p^3 - p^6 \leq p^3$$

Así que

$$\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) \leq \binom{n}{3} p^3$$

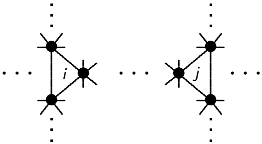
El Resultado
Demostración

Observemos que $Cov(T_i, T_j) = 0$ si el i-ésimo y el j-ésimo triángulo están separados:

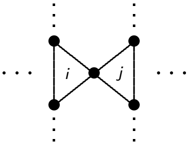


El Resultado
Demostración

Observemos que $Cov(T_i, T_j) = 0$ si el i-ésimo y el j-ésimo triángulo están separados:



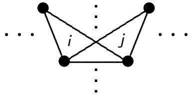
o comparten un solo vértice:



El Resultado

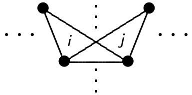
Demostración

En el caso de que compartan una arista:



El Resultado
Demostración

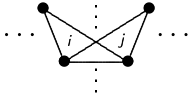
En el caso de que compartan una arista:



$$Cov(T_i, T_j) = E(T_iT_j) - E(T_i)E(T_j)$$

El Resultado
Demostración

En el caso de que compartan una arista:

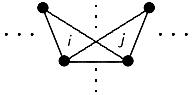


$$Cov(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5$$

El Resultado

Demostración

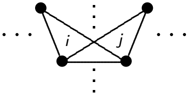
En el caso de que compartan una arista:



$$Cov(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5 - p^6$$

El Resultado
Demostración

En el caso de que compartan una arista:



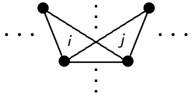
$$Cov(T_i, T_j) = E(T_iT_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5 - p^6 \leq p^5$$

Así

$$\sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) = \binom{n}{4}$$

El Resultado
Demostración

En el caso de que compartan una arista:



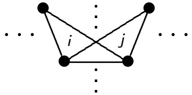
$$Cov(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5 - p^6 \leq p^5$$

Así

$$\sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) = \binom{n}{4}\binom{4}{2}$$

El Resultado
Demostración

En el caso de que compartan una arista:



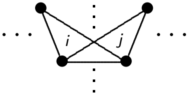
$$Cov(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5 - p^6 \leq p^5$$

Así

$$\sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) = \binom{n}{4}\binom{4}{2} p^5 - p^6$$

El Resultado
Demostración

En el caso de que compartan una arista:



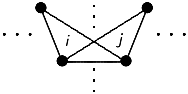
$$Cov(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5 - p^6 \leq p^5$$

Así

$$\sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) = 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5 - p^6$$

El Resultado
Demostración

En el caso de que compartan una arista:



$$Cov(T_i, T_j) = E(T_iT_j) - E(T_i)E(T_j) = p^5 - p^6 \leq p^5$$

Así

$$\sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) = 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5 - p^6 \leq 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5$$

El Resultado
Demostracin

Tenemos entonces que

$$Var(T)$$

El Resultado

Demostracin

Tenemos entonces que

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) + \sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j)$$

El Resultado

Demostracin

Tenemos entonces que

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) + \sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) \leq \binom{n}{3} p^3$$

El Resultado

Demostracin

Tenemos entonces que

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) + \sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) \leq \binom{n}{3} p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2} p^5$$

El Resultado

Demostracin

Tenemos entonces que

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Var(T_i) + \sum_{i \neq j} Cov(T_i, T_j) \leq \binom{n}{3} p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2} p^5$$

y

$$E(T) = \binom{n}{3} p^3$$

El Resultado

Demostración

Por lo tanto

$$\frac{Var(T)}{E(T)^2} \leq \frac{\binom{n}{3}p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2}$$

El Resultado

Demostración

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(T)}{E(T)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3}p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2}$$

El Resultado
Demostración

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(T)}{E(T)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3}p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2} = 0$$

El Resultado

Demostración

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(T)}{E(T)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3}p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2} = 0$$

y por *El Lema*

$$\lim_{n\to\infty} P(T > 0) = 1$$

★

Algo Más
¿Y si p varía?

Hasta ahora hemos considerado p fija, pero es interesante pensar en $p(n)$, es decir p como función de n.

Algo Más
¿Y si p varía?

Hasta ahora hemos considerado p fija, pero es interesante pensar en $p(n)$, es decir p como función de n.

Se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\binom{n}{3}p^3+2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2}}{\frac{1}{n^3p^3}+\frac{1}{n^2p}} = 0$$

Algo Más

¿Y si p varía?

Hasta ahora hemos considerado p fija, pero es interesante pensar en $p(n)$, es decir p como función de n.

Se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\binom{n}{3}p^3+2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2}}{\frac{1}{n^3p^3}+\frac{1}{n^2p}} = 0$$

Es decir que

$$\frac{1}{n^3p^3}+\frac{1}{n^2p} >> \frac{\binom{n}{3}p^3+2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2}$$

Algo más
¿Y si p varía?

En tal caso basta que $p(n) >> \frac{1}{n}$ para que nuestro argumento siga funcionando, ya que entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3p^3}+\frac{1}{n^2p}\right)=0$$

Para terminar

Un par de observaciones interesantes

- Localmente, nuestra gráfica tiene muy pocas aristas.

Para terminar

Un par de observaciones interesantes

- Localmente, nuestra gráfica tiene muy pocas aristas.
- $p(n)$ puede ser casi tan pequeña como querramos (basta pedir que $p(n) >> \frac{1}{n}$) y entonces podemos reducir el número de aristas que, en promedio, aparecen en $G_{n,p}$ de manera considerable.

¡GRACIAS!